

Kapitel 4

Gleichgewicht von Stabwerken

Durch die Festlegung auf die grundlegenden Elementtypen und die knotenzentrierten Koordinatensysteme ist der Weg zur Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen vorgezeichnet. Wir betrachten nur Stabwerke, die aus den in Kapitel 3 festgelegten Elementtypen aufgebaut sind und nehmen an, daß die Elementgleichgewichtsbedingungen

$$(\underline{a}^i)^T \underline{F}^i = \underline{S}^i \quad (4.1)$$

in den knotenzentrierten Koordinatensystemen des linken und rechten Knotens (Element i) bekannt sind. Das Prinzip der Berechnung läßt sich damit einfach darstellen.

4.1 Grundlagen

Eine wesentliche Grundlage ist das Schnittprinzip: Wir denken uns die einzelnen Elemente des Stabwerks herausgeschnitten. Für die Wechselwirkung zwischen Element und Knoten gilt das *Gegenwirkungsprinzip*:

actio = reactio; die Stabendkräfte in einem durch einen Schnitt freigelegten Stabende sind den auf den Knoten wirkenden Kräften entgegengerichtet und dem Betrage nach gleich groß (Abbildung 4.1)

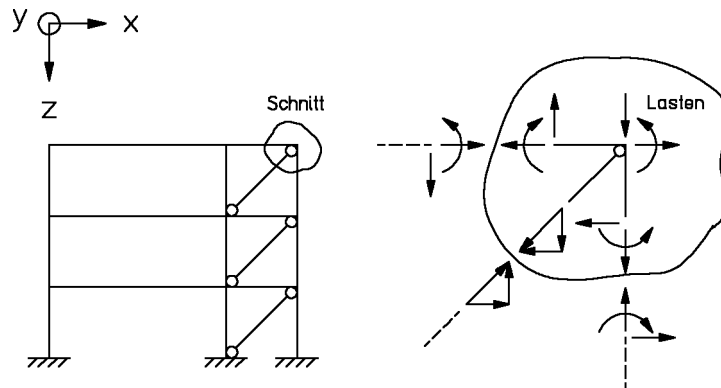


Abbildung 4.1: Erläuterung zum Schnittprinzip

Für ein Tragwerk gelten zusammengefaßt folgende Gleichgewichtsaussagen:

Satz 4.1: ein Stabwerk ist nur dann im Gleichgewicht, wenn

- die Lasten mit den Lagerreaktion im Gleichgewicht sind,
- jedes Stabelement im Gleichgewicht ist,
- an allen Knoten, die man sich durch Knotenschnitte freigelegt denkt, Gleichgewicht zwischen den Knotenlasten und den Knotenkräften herrscht.

Die Knotenkräfte im Knoten i sind die Summe der Stabendkräfte (reactio) aller am Knoten i angeschlossenen Stabelemente.

4.2 Gleichgewichtsbedingungen

Mit Bezug auf die Randbedingungen bezeichnen wir ein Stabwerk als unverschieblich, wenn alle Starrkörperverschiebungen verhindert sind: in einem ebenen Stabwerk gibt es drei unabhängige Starrkörperverschiebungen, zwei Translationen in der Ebene und eine Rotation in der Ebene; mindestens diese Starrkörperverschiebungen müssen in einem unverschieblichen ebenen Stabwerk vorgegeben sein. In einem unverschieblichen räumlichen Stabwerk müssen mindestens drei linear unabhängige Translationen und drei linear unabhängige Rotationen vorgegeben sein.

Für die Formulierung der Gleichgewichtsbedingungen nehmen wir an, daß die vorgegebenen Verschiebungen bzw. Verdrehungen Null sind; vorgegebene Lagerverschiebungen ungleich Null werden an späterer Stelle ausführlich behandelt.

Die Überprüfung, ob durch die vorgegebenen Lagerungsbedingungen tatsächlich alle Starrkörperverschiebungen verhindert werden, ist im allgemeinen nur durch die Überprüfung der linearen Unabhängigkeit der Gleichgewichtsbedingungen möglich; wir zeigen deshalb zunächst, wie diese Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden.

Die Gleichgewichtsbedingungen in den durch Knotenschnitte freigelegten Knoten werden im globalen oder einem lokalen knotenbezogenen Koordinatensystem aufgestellt. Alle Knoten eines Stabwerkes können durch äußere Kräfte beansprucht werden

- die inneren Knoten durch die Belastung,
- die Randknoten durch die Lagerreaktionen.

Lagerreaktionen werden also zu den äußeren Kräften gezählt (Abbildung 4.2).

Definition 4.1: Lagerreaktionen im Knoten i sind positiv in Richtung der positiven Achsen des Koordinatensystems im Knoten i .

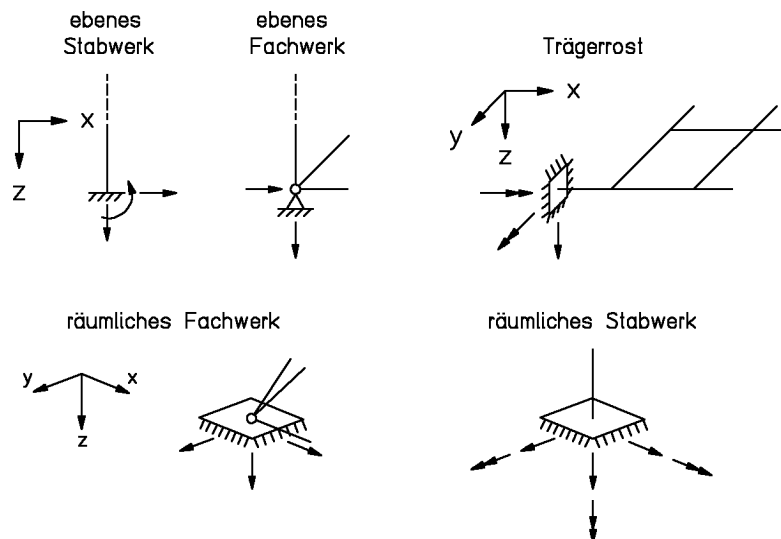


Abbildung 4.2: Positive Lagerreaktionen unverschieblicher Lager

Lagerreaktionen sind damit unbekannte äußere Kräfte, die in den Knoten in Richtung der Verschiebungskomponenten auftreten, welche vorgegeben sind.

In Richtung der freien Verschiebungskomponenten können Knotenlasten vorgegeben werden.

Zur Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen numerieren wir alle in den Knoten angreifenden Kräfte und Momente; der Kopfzeiger kennzeichnet die Knotennummer, der Fußzeiger die Belastungskomponente, die Lasten werden mit R bezeichnet, die Lagerreaktion mit \check{R} . Die Anzahl der Belastungskomponenten im Knoten k sei d_k . Für das Stabwerk können somit

$$n' = \sum_{k=1}^p d_k \quad (4.2)$$

Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden.

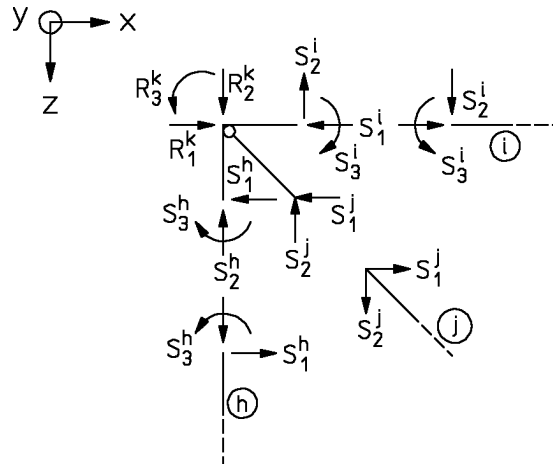


Abbildung 4.3: Gleichgewicht am Knoten

Für den Knoten k eines Rahmens (Abbildung 4.3) erhält man die folgenden Gleichgewichtsbedingungen:

Gleichgewicht:

$$\begin{aligned} s_1^h + s_1^i + s_1^j &= R_1^k \\ s_2^h + s_2^i + s_2^j &= R_2^k \\ s_3^h + s_3^i + 0 &= R_3^k \end{aligned}$$

Der Knotennumerierung folgend werden alle Komponenten der Knotenlasten in einem Knotenlastenvektor \underline{R}' zusammengefaßt:

Der Elementnumerierung folgend werden alle Komponenten der Stabendkräfte in einem Stabendkraftvektor \underline{S} zusammengefaßt; für q Ele-

$$\underline{R}' = \left[\begin{array}{c} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ \tilde{R}_{n'} \end{array} \right] \left. \begin{array}{l} \text{innere Knoten} \\ \text{Lager} \end{array} \right\} \quad (4.3)$$

mente erhält man:

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ \vdots \\ S_{m'} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \underline{S}^1 \\ \underline{S}^2 \\ \vdots \\ \underline{S}^q \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

$$\text{mit } m' = \sum_{i=1}^q d'_i. \quad (4.5)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen des Gesamtsystems ergeben sich damit zu

$$\underline{C}' \underline{S} = \underline{R}' \quad (4.6)$$

mit $\underline{C}'_{n' \times m'}$.

Die Komponenten von \underline{C}' erhält man zeilenweise wie folgt:

$$\begin{aligned} C'_{ij} &= 1, \text{ wenn } S_j \text{ einen Beitrag zu dem Gleichgewicht in} \\ &\quad \text{Richtung von } R'_i \text{ leistet} \\ C'_{ij} &= 0, \text{ wenn } S_j \text{ am Gleichgewicht in Richtung von } R'_i \\ &\quad \text{nicht beteiligt ist} \end{aligned}$$

\underline{C}' ist eine $(0,1)$ -Matrix; wir bezeichnen sie als *Verknüpfungs- oder Inzidenzmatrix* des Stabwerkes. Die systematische Besetzung von \underline{C}' erfolgt ausgehend von der Verknüpfungstafel (Kapitel 2).

Gleichung (4.6) ist in Abbildung 4.4 symbolisch dargestellt.

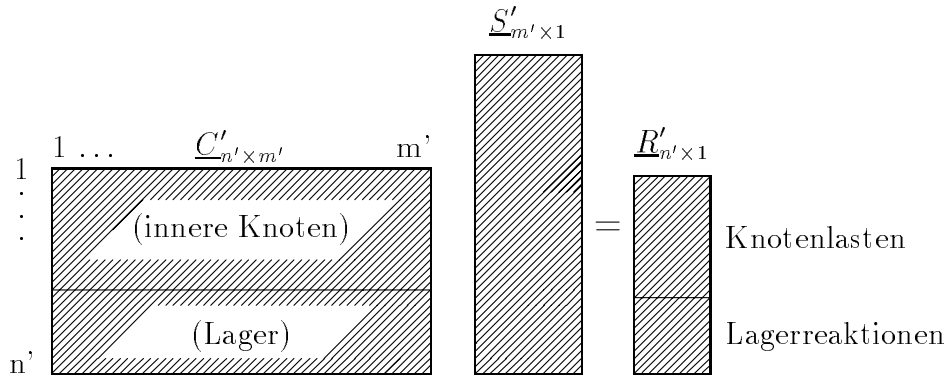


Abbildung 4.4: Vollständige Gleichgewichtsbedingungen

In Reihenfolge der Elementnumerierung wird der Vektor der linear unabhängigen Stabendkräfte eingeführt:

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \underline{F}^1 \\ \underline{F}^2 \\ \vdots \\ \underline{F}^q \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Analog zu (3.14) gilt für das Gesamttragwerk mit $\text{diag}\{(\underline{a}^i)^T\}$ als Hyperdiagonalmatrix (Anhang A1)

$$\underline{S} = \text{diag}\{(\underline{a}^i)^T\} \underline{F}. \quad (4.8)$$

Durch Einsetzen in (4.6) erhält man

$$\underline{C}' \text{diag}\{(\underline{a}^i)^T\} \underline{F} = \underline{R}'. \quad (4.9)$$

Zur Abkürzung der Schreibweise setzen wir

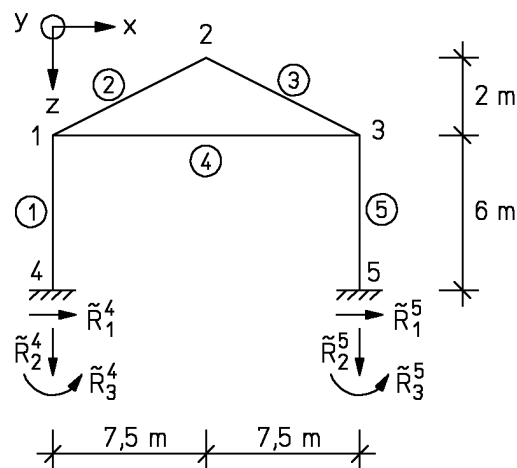
$$(\underline{a}')^T = \underline{C}' \text{diag}\{(\underline{a}^i)^T\}. \quad (4.10)$$

und erhalten damit für (4.6)

$$(\underline{a}')^T \underline{F} = \underline{R}'. \quad (4.11)$$

Es ist dies die *vollständige Gleichgewichtsbedingung* des Gesamttragwerkes.

Zur näheren Erläuterung wird dieses Gleichungssystem für das in Abbildung 4.5 dargestellte Stabtragwerk aufgestellt.



Element	Knoten	
	l	r
①	1	4
②	1	2
③	2	3
④	1	3
⑤	3	5

Knoten	Koordinaten	
	x	z
1	0	2
2	7,5	0
3	15	2
4	0	8
5	15	8

Abbildung 4.5: Rahmen in der Ebene mit Verknüpfungstafel

die folgenden Elementgleichgewichtsmatrizen

$$(\underline{a}^i)^T = \begin{bmatrix} -\cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & -\cos \alpha & 0 \\ 0 & l & -1 \\ \hline \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Element	$l_i [m]$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
①	6	0	1
②	7,76	0,966	-0,258
③	7,76	0,966	0,258
④	15	1	0
⑤	6	0	1

$$(\underline{a}^1)^T = (\underline{a}^5)^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -1 \\ \dots\dots\dots \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\underline{a}^2)^T = \begin{bmatrix} -0,966 & -0,258 & 0 \\ 0,258 & -0,966 & 0 \\ 0 & 7,76 & -1 \\ \dots\dots\dots \\ 0,966 & 0,258 & 0 \\ -0,258 & 0,966 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\underline{a}^3)^T = \begin{bmatrix} -0,966 & 0,258 & 0 \\ -0,258 & -0,966 & 0 \\ 0 & 7,76 & -1 \\ \dots\dots\dots \\ 0,966 & -0,258 & 0 \\ 0,258 & 0,966 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\underline{a}^4)^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 15 & -1 \\ \dots\dots\dots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Die Anzahl der Knotenlasten R_i^k wird mit n bezeichnet:

$$n = n' - n_r.$$

Für Tragwerke mit unverschieblichen Lagern ist die Matrix der ersten n Zeilen von $(\underline{a}')^T$ die Gleichgewichtsmatrix \underline{a}^T (Abbildung 4.6). Die Gleichgewichtsbedingungen eines Tragwerkes lauten damit

$$\underline{a}^T \underline{F} = \underline{R} \quad (4.12)$$

Eine andere Möglichkeit zur Berücksichtigung der Lagerreaktionen besteht darin, daß man die unbekanntes Stabendkräfte \underline{F} mit den unbekanntes Lagerreaktionen in einem Vektor zusammenfaßt. Dieser Weg wird in der Literatur (/66/, /47/) verschiedentlich angegeben. Da er jedoch eine größere Gleichgewichtsmatrix als der hier beschriebene Weg erfordert, wird er nicht weiter verfolgt.

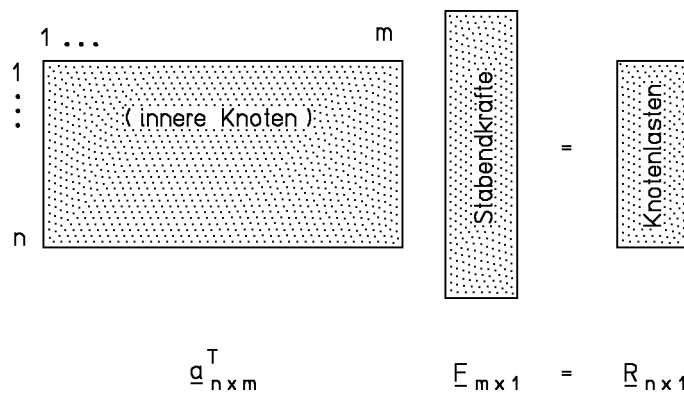


Abbildung 4.6: Gleichgewichtsbedingungen des Tragwerkes

Dem Streichen von Gleichgewichtsbedingungen für die unbekanntes Lagerreaktionen entspricht eine Linksmultiplikation von (4.8) mit einer unvollständigen Einheitsmatrix \hat{I} , man erhält

$$\hat{I}(\underline{a}')^T \underline{F} = \underline{a}^T \underline{F}$$

mit $\underline{R} = \hat{I} \underline{R}'$, $\hat{I}_{n \times n'}, n' > n$

und $\hat{I}_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$
 $= 1$ für alle $i = j$.

Die letzten $n' - n$ Spalten von \hat{I} sind Null.

Bei beliebiger Numerierung der Gleichgewichtsgleichungen an Lagerpunkten müssen Zwischenzeilen in $(\underline{a}')^T$ gestrichen werden; jede Zwischenspalte mit Nullwerten in einer unvollständigen Einheitsmatrix bewirkt die Streichung der entsprechenden Zeilen vor $(\underline{a}')^T$, z. B. werden durch Linksmultiplikation einer allgemeinen Matrix $(\underline{a}')_{q \times m}^T$ mit der Matrix

$$\hat{I}_{6 \times 9} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & 0 & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & 0 & & & \\ & & & & & & 1 & & \\ & & & & & & & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$\uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow \qquad \qquad \qquad \uparrow$

die Zeilen 3, 6 und 9 gestrichen und man erhält

$$\hat{I}(\underline{a}')^T = \underline{a}_{6 \times m}^T$$

Wir zeigen dies für den durch ein schiefes Gleitlager (Abbildung 4.7) modifizierten Rahmen nach (Abbildung 4.5) :

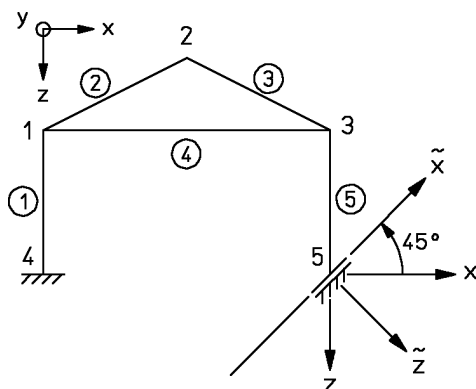


Abbildung 4.7: Rahmen mit schiefem Gleitlager im Knoten 5

4.3 Gelenke und Gelenkknoten

Bisher wurde davon ausgegangen, daß die Stäbe eines Stabtragwerkes immer biegesteif miteinander verbunden sind. In Kapitel 2 wurden jedoch auch Stabtragwerke mit Gelenken eingeführt.

Wir unterscheiden zwei Arten von Gelenken (vgl. Abbildung 4.8):

- (a) Stabgelenke sind spezielle Stabelemente mit einer oder mehreren zusätzlichen Kräftebedingungen im Innern des Stabelementes, z. B. werden die Biegemomente, Querkräfte oder Normalkräfte zu Null vorgegeben (bei n_e Komponenten von \underline{F}^i können höchstens $n_e - 1$ innere Kräfte zu Null vorgegeben werden),
- (b) Knotengelenke sind durch zusätzliche Kräftebedingungen bei mehr als zwei Stäben in einem Knotenpunkt gekennzeichnet.

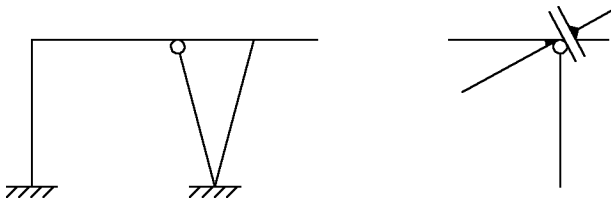


Abbildung 4.8: Ausführungsformen allgemeiner Gelenkknoten bei ebenen Stabtragwerken

Die Erfassung von Stabgelenken erfolgt durch spezielle Stabelemente mit Gelenken im Innern. Die zusätzlichen Kräftebedingungen werden in den entsprechenden Elementmatrizen erfaßt. Dies wird am Beispiel eines ebenen Stabelementes am nachfolgenden Beispiel gezeigt:

Beispiel 4.3: Ebenes Stabelement mit Querkraftgelenk

Ausgegangen wird von einem ebenen Stabelement mit einem Querkraftgelenk an beliebiger Position innerhalb des Elementes. Eine statisch bestimmte Lagerung und die zugehörigen linear unabhängigen Stabendkräfte \underline{F}^i sind in Abbildung 4.9 dargestellt.

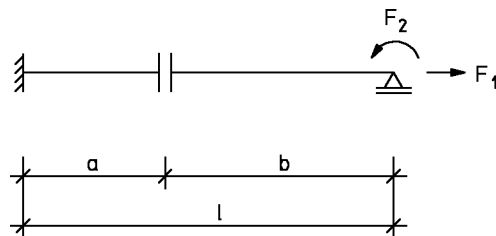


Abbildung 4.9: Mögliche Lagerung und linear abhängige Stabendkräfte für ein ebenes Stabelement mit Querkraftgelenk

Die Kräftetransformationsmatrix \underline{T}^i und die Gleichgewichtsmatrix $(\underline{a}^i)^T$ ergeben sich somit zu:

$$\underline{T}^i = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\underline{a}^i)^T = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ -c & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

mit

$$c = \cos \alpha = (x_r - x_l)/l. \quad (4.14)$$

Durch jede Gelenkbedingung entfällt genau eine linear unabhängige Stabendkraft und die Anzahl der Spalten von $(\underline{a}^i)^T$ verringert sich um eins. Die Aufstellung der Gesamtgleichgewichtsbedingungen erfolgt in unveränderter Form wie im Abschnitt 4.2 beschrieben.

Die Erfassung von Knotengelenken ist komplizierter und kann nur durch die Einführung von mehreren Knoten am Gelenk mit Kopplung von Freiheitsgraden erfolgen. Für das Knotengelenk nach Abbildung 4.10 wurden z. B. zwei Knoten k und l mit einem knotenzentrierten Koordinatensystem eingeführt.

In Richtung von \tilde{x} werden für jeden der Knoten k und l gesonderte Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt, in \tilde{z} -Richtung und für die Rotation der Zeichenebene wird jeweils nur eine Gleichgewichtsbedingung

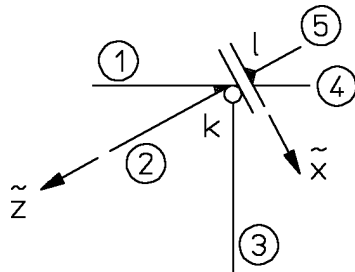


Abbildung 4.10: Koordinatensystem zur Erfassung von Knotengelenken

formuliert; dies entspricht einer Kopplung der entsprechenden Freiheitsgrade. Die Elemente 1 und 2 sind dadurch biegesteif in k angeschlossen, Element 3 ist mit einem Momentengelenk angeschlossen und die Elemente 4 und 5 sind biegesteif in l angeschlossen. Die Gleichgewichtsbedingungen in \tilde{x} -Richtung werden in Knoten k und l jeweils getrennt formuliert.

Beispiel 4.4: Knotengelenk

Für das in Abbildung 4.11 dargestellte System werden die Elementgleichgewichtsmatrizen $(\underline{a}^i)^T$ und die Gesamtgleichgewichtsmatrix $(\underline{a}')^T$ aufgestellt.

Die Elemente ①, ②, ④ und ⑤ werden als ebene Stabelemente vom Typ a gewählt. Das Momentengelenk in Knoten $3l$ wird dem Element ③ zugeordnet.

Für das Element ③ wurde abweichend von Kapitel 2.2 der Knoten 6 als linker Knoten gewählt.

Die Elementgleichgewichtsmatrizen können dem Anhang A3 entnommen werden. Für die Winkel der Koordinatentransformation ersetzt am Knoten 3 das Knotenkoordinatensystem (Abbildung 4.10) das globale Koordinatensystem.

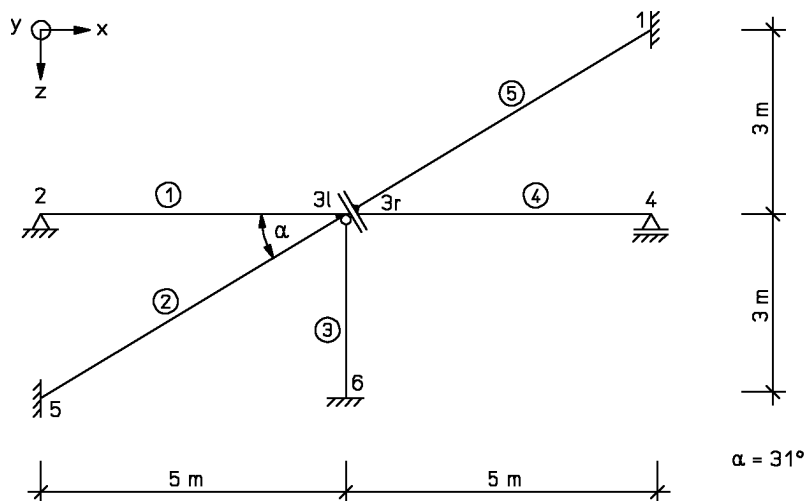


Abbildung 4.11: System mit Querkraftgelenk

Knoten	Koordinaten	
	x	z
1	10	0
2	0	3
3	5	3
4	10	3
5	0	6
6	5	6

Element	Knoten		l_i [m]	linker Knoten		rechter Knoten	
	l	r		$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
①	2	3	5	1	0	0,514	-0,857
②	3	5	5,831	0	1	-0,857	0,514
③	6	3	3	0	-1	-0,857	-0,514
④	3	4	5	0,514	-0,857	1	0
⑤	1	3	5,831	-0,857	0,514	0	1

$$(\underline{a}^1)^T \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -0,2 & -0,2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0,514 & 0,171 & 0,171 \\ -0,857 & 0,103 & 0,103 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (\underline{a}^2)^T \begin{bmatrix} 0 & 0,171 & 0,171 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline -0,857 & -0,088 & -0,088 \\ 0,514 & -0,147 & -0,147 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\underline{a}^3)^T = \begin{bmatrix} 0 & -0,333 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline -0,857 & 0,171 \\ -0,514 & -0,286 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (\underline{a}^4)^T = \begin{bmatrix} -0,514 & -0,171 & -0,171 \\ 0,857 & -0,103 & -0,103 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\underline{a}^5)^T = \begin{bmatrix} 0,857 & 0,088 & 0,088 \\ -0,514 & 0,147 & 0,147 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -0,171 & -0,171 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\underline{a}'^T =$	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	0,857 0,088 0,088 -0,514 0,147 0,147 0 1 0	1
	-1 0 0 0 -0,2 -0,2 0 1 0	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	2
	0,514 0,171 0,171 0 0 0 -0,857 0,103 0,103 0 0 1	0 0,171 0,171 0 0 0 -1 0 0 0 1 0	-0,857 0,171 0 0 -0,514 -0,286 0 0 0	0 0 0 -0,514 -0,171 -0,171 0,857 -0,103 -0,103 0 1 0	0 0 0 0 -0,171 -0,171 1 0 0 0 0 1	3
	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	1 0 0 0 0,2 0,2 0 0 1	<u>0</u>	4
	<u>0</u>	-0,857 -0,088 -0,088 0,514 -0,147 -0,147 0 0 1	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	5
	<u>0</u>	<u>0</u>	0 -0,333 1 0 0 1	<u>0</u>	<u>0</u>	6
	①	②	③	④	⑤	

Der zugehörige Vektor der äußeren Kräfte \underline{R}' lautet:

$$(\underline{R}')^T = \left[\tilde{R}_1^1 \tilde{R}_2^1 \tilde{R}_3^1 : \tilde{R}_1^2 \tilde{R}_2^2 \tilde{R}_3^2 : R_1^{3l} R_1^{3r} R_2^3 R_3^3 : R_1^4 \tilde{R}_2^4 R_3^4 : \tilde{R}_1^5 \tilde{R}_2^5 \tilde{R}_3^5 : \tilde{R}_1^6 \tilde{R}_2^6 \tilde{R}_3^6 \right]$$

4.4 Redundanz eines Stabwerkes

Aus der Mechanik /39/ sind der Begriff der Redundanz (statischen Unbestimmtheit) und Abzählkriterien zur Feststellung der Redundanz bekannt. Die Redundanz eines Tragwerkes ergibt sich direkt aus der Ordnung $n \times m$ der Gleichgewichtsmatrix \underline{a}^T (Abbildung 4.6). Es gilt:

Satz 4.3: *Ein Tragwerk ist statisch bestimmt, wenn $n = m$ und \underline{a}^T nicht singular ist; ein Tragwerk ist statisch unbestimmt, wenn $n < m$ ist; ein Tragwerk ist kinematisch verschieblich, wenn $n > m$ ist.*

Für $n = m$, d. h. wenn das Tragwerk statisch bestimmt ist, können wir das Gleichungssystem $\underline{a}^T \underline{F} = \underline{R}$ lösen. Die Stabendkräfte und damit die Schnittgrößen können allein mit den Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden.

In der Literatur findet man oft eine Unterscheidung in *äußerliche* und *innerliche* statische Bestimmtheit. Ein Tragwerk ist *äußerlich statisch* bestimmt, wenn die Lagerreaktionen alleine mit den 3 (6) Gleichgewichtsbedingungen der Ebene (des Raumes) berechnet werden können. Der Begriff der *inneren statischen Bestimmtheit* eines statisch unbestimmten Tragwerkes sagt aus, daß eine statisch unbestimmte Lagerung vorliegt. Oft findet man auch den Begriff der *Wertigkeit eines Lagers*. Unter Wertigkeit eines Lagers versteht man die Anzahl der durch das Lager behinderten Verschiebungen.

4.5 Schnittgrößen statisch bestimmter Stabwerke

Bei statisch bestimmten Stabwerken ist die Gleichgewichtsmatrix \underline{a}^T quadratisch und nicht singular, d. h. es existiert die Inverse $(\underline{a}^T)^{-1}$. Die linear unabhängigen Stabendkräfte \underline{F} können mit dem Gauß'schen Algorithmus (siehe Anhang A 2.1) berechnet werden.

Sind die linear unabhängigen Stabendkräfte \underline{F} aus der Lösung des linearen Gleichungssystems (Abbildung 4.6) bekannt, können die Vektoren der Stabendkräfte $\underline{\bar{S}}^i$ in lokalen Koordinaten elementweise mit (3.5) berechnet werden. Die Schnittgrößen ergeben sich aus den Stabendkräften durch :

Satz 4.2: Die Schnittgrößen am rechten Stabende (r) sind die Stabendkräfte am rechten Stabende; die Schnittgrößen am linken Stabende (l) sind die negativen Stabendkräfte am linken Stabende (vgl. Definition 3.2).

Bei *Fachwerken* ist die Ermittlung der Schnittgrößen einfacher. Mit (3.2) ergibt sich, daß die Normalkraft N in jedem Stab mit der linear unabhängigen Stabendkraft identisch ist. Die Transformation nach (3.3) ist somit überflüssig.

Bei *ebenen Stabtragwerken* stellt man die Schnittgrößen graphisch durch die sogenannten *Zustandslinien* dar. Da wir vorläufig nur unbelastete Elemente betrachten, sind die Normalkraft N und die Querkraft Q in jedem Element konstant, und das Biegemoment M ist linear veränderlich. Einen Überblick über die erforderlichen Einzelschritte gibt die folgende

Zusammenfassung der Berechnung der Schnittgrößen statisch bestimmter Stabwerke

1. Numerierung der Knoten und Elemente;
2. Aufstellen der Koordinaten- und Verknüpfungstafel;
3. Aufstellen der Elementtypen entsprechend Anhang A 3;
4. Zusammenstellung der Gleichgewichtsmatrizen $(\underline{a}^i)^T$;
5. Zusammenbau der Gleichgewichtsmatrizen der Elemente zur Gleichgewichtsmatrix \underline{a}^T unter Berücksichtigung der Randbedingungen;
6. Lösung des Gleichungssystemes $\underline{a}^T \underline{F} = \underline{R}$;
7. Berechnung von $\overline{S}^i = \underline{T}^i \underline{F}^i$;
8. Umkehr der Vorzeichen am linken Stabende, bei ebenen Stabtragwerken graphische Darstellung der Schnittgrößen.

An einem Beispiel soll nun die Ermittlung der Zustandslinien eines einfachen Rahmens gezeigt werden.

Beispiel 4.5: Zustandslinien

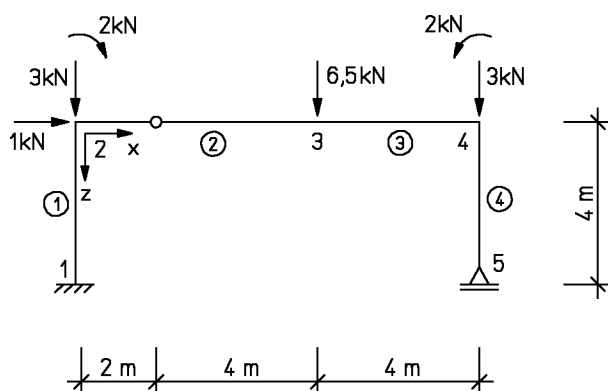


Abbildung 4.12: Rahmen

Koordinatentafel

Knoten	x	z
1	0	4
2	0	0
3	6	0
4	10	0
5	10	4

Verknüpfungstafel

Element	Knoten		$l_i [m]$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
	1	2			
①	1	2	4	0	-1
②	2	3	6	1	0
③	3	4	4	1	0
④	4	5	4	0	1

mit $\cos \alpha = (x_r - x_l)/l_i$
 $\sin \alpha = (z_r - z_l)/l_i$

Elementgleichgewichtsmatrizen (für die Elemente ①, ③ und ④ wird Stabelement Typ-b gewählt):

$$(\underline{a}^1)^T = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ \dots\dots\dots \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\underline{a}^2)^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0,5 \\ 0 & 1 \\ \dots\dots\dots \\ 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(\underline{a}^3)^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ \dots\dots\dots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\underline{a}^4)^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ \dots\dots\dots \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Gleichgewichtsbedingungen des gesamten Tragwerks

$$\begin{array}{c} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ \hline 0 \\ 6,5 \\ 0 \\ \hline 0 \\ 3 \\ 2 \\ \hline 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{array}{ccc|cc|c|c} 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & \underline{0} & \underline{0} \\ -1 & 0 & 0 & 0 & -0,5 & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & & \\ \hline & & & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & \underline{0} \\ \underline{0} & & & 0 & 0,5 & 0 & -1 & 0 & \\ & & & 0 & 2 & 0 & 4 & -1 & \\ \hline & & & \underline{0} & & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \underline{0} & & & & \underline{0} & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -1 \\ \hline & & & \underline{0} & & & & & 0 & -1 & 0 \\ & & & & \underline{0} & & & & 0 & 0 & 1 \end{array} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1^1 \\ F_2^1 \\ F_3^1 \\ \hline F_1^2 \\ F_2^2 \\ \hline F_1^3 \\ F_2^3 \\ F_3^3 \\ \hline F_1^4 \\ F_2^4 \\ F_3^4 \end{bmatrix}$$

Element:

①

②

③

④

Für die Lösung des Gleichungssystems verwenden wir das Matrizeninterpretationssystem SMIS /37/. Die Eingabe ist im folgenden zusammengestellt:

```
LOAD  F1 = AT  N1 = 11  N2 = 11
      :
```

Es folgen zeilenweise die Elemente der Matrix \underline{a}^T .

```
LOAD  F1 = R  N1 = 11  N2 = 1
      :
```

Es folgen die Elemente des Vektors \underline{R} .

```
SOLVE  F1 = AT  F2 = R
PRINT  F1 = R
```

Es werden die linear unabhängigen Stabendkräfte ausgegeben:

$$\underline{F}^T = [-6,5 \quad 1 \quad -9 \mid 0 \quad 7 \mid 0 \quad -3 \quad 2 \mid -6 \quad 0 \quad 0].$$

Kräfte Transformationsmatrizen

$$\underline{T}^1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ \dots\dots\dots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{T}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0,5 \\ 0 & 1 \\ \dots\dots\dots \\ 1 & 0 \\ 0 & 0,5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{T}^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ \dots\dots\dots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{T}^4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ \dots\dots\dots \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Stabendkräfte

$$\underline{S}^1 = \begin{bmatrix} 6,5 \\ -1 \\ 13 \\ -6,5 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_1^1 \\ \underline{S}_2^1 \\ \underline{S}_3^1 \\ \underline{S}_4^1 \\ \underline{S}_5^1 \\ \underline{S}_6^1 \end{bmatrix} \quad \underline{S}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3,5 \\ 7 \\ 0 \\ 3,5 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_1^2 \\ \underline{S}_2^2 \\ \underline{S}_3^2 \\ \underline{S}_4^2 \\ \underline{S}_5^2 \\ \underline{S}_6^2 \end{bmatrix} \quad \underline{S}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 14 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_1^3 \\ \underline{S}_2^3 \\ \underline{S}_3^3 \\ \underline{S}_4^3 \\ \underline{S}_5^3 \\ \underline{S}_6^3 \end{bmatrix} \quad \underline{S}^4 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{S}_1^4 \\ \underline{S}_2^4 \\ \underline{S}_3^4 \\ \underline{S}_4^4 \\ \underline{S}_5^4 \\ \underline{S}_6^4 \end{bmatrix}$$

Schnittgrößen am linken und rechten Stabende (Dimension [kN, kNm])

Element ①	②	③	④
$\begin{bmatrix} N_l \\ Q_l \\ M_l \\ N_r \\ Q_r \\ M_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6,5 \\ 1 \\ -13 \\ -6,5 \\ 1 \\ -9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} N_l \\ Q_l \\ M_l \\ N_r \\ Q_r \\ M_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3,5 \\ -7 \\ 0 \\ 3,5 \\ 14 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} N_l \\ Q_l \\ M_l \\ N_r \\ Q_r \\ M_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 14 \\ 0 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} N_l \\ Q_l \\ M_l \\ N_r \\ Q_r \\ M_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \\ -6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Die Zustandslinien sind in Abbildung 4.13 graphisch dargestellt.

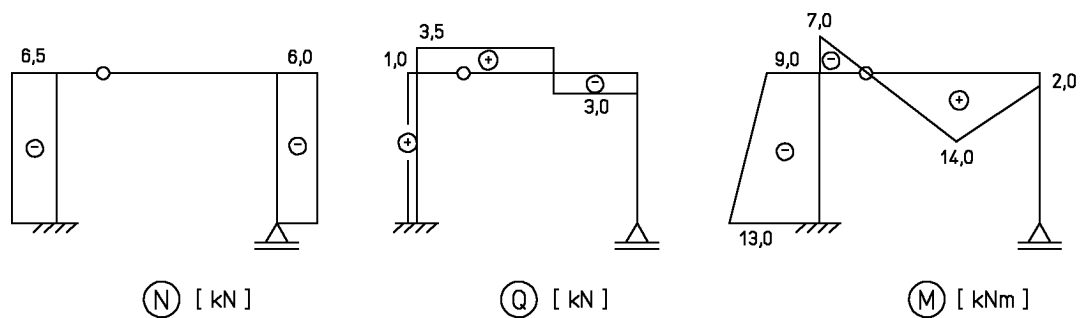
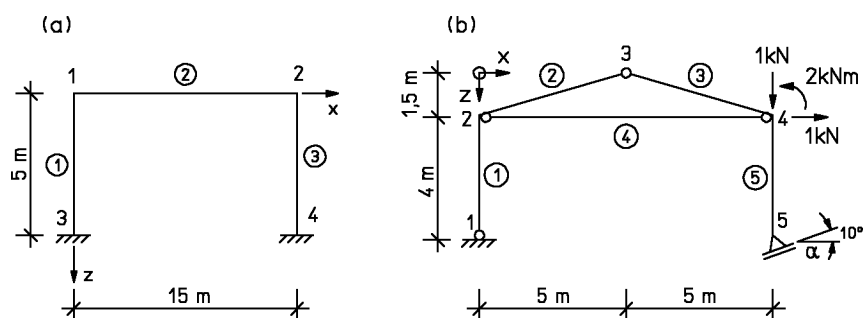


Abbildung 4.13: Zustandslinien

Aufgaben

1. Stellen Sie für die in Aufgabe 2.1 und 2.2 dargestellten Systeme die Gleichgewichtsmatrix \underline{a}^T auf. Der Grad der statischen Unbestimmtheit ist jeweils anzugeben. Für die statisch bestimmten Systeme sind die Schnittgrößen zu ermitteln.
2. Stellen Sie für die abgebildeten Stabtragwerke die Gleichgewichtsmatrix auf.

Verwenden Sie für Aufgabe (a) einmal Stabelement Typ-a und einmal Typ-b. Berechnen Sie für das in Aufgabe (b) dargestellte Stabwerk die Schnittgrößen.



3. Stellen Sie für den abgebildeten Kragarm die Gleichgewichtsmatrix auf. Die Elemente sollen einmal Trägerrost- und einmal räumliche Stabelemente sein. Wie darf der Kragarm belastet werden, damit er wie ein Trägerrost berechnet werden kann?

