KAPITEL D

Transportvorgänge

1. Einleitung

Bisher wurde das Hauptaugenmerk auf Gleichgewichtszustände gerichtet. Hat man in einem System an unterschiedlichen Orten unterschiedliche Temperaturen, so liegt sicher kein thermisches Gleichgewicht vor, und es fließt Wärme. Die Wärmemenge, die pro Zeit und Querschnittsfläche durch eine Fläche strömt, nennt man den Wärmestrom ϕ_u. Wärmeübergang, der nicht mit Materietransport verbunden ist, etwa von einer Kochplatte zum metallenen Griff eines Kochtopfes, nennt man Wärmeleitung. Geschieht die Wärmeübertragung durch Materietransport wie Wärme- oder Kälteeinbruch bei verschiedenen Winden, so spricht man von Konvektion. Ohne jede Beteiligung von Materie kann Wärme durch Strahlung übertragen werden, wie der Wärmestrom von der Sonne auf die Erde zeigt. In vielen praktischen Situationen beruht die Wärmeübertragung auf einer Kombination dieser Grundprozesse.

Es gibt eine Reihe von Transportprozessen, denen eine ähnliche Physik zugrunde liegt wie die Wärmeleitung, so daß man sie mit dem gleichen Formalismus beschreiben kann: Ein Gradient einer physikalischen Größe erzeugt einen Strom. Bei der Wärmeleitung erzeugt ein Temperaturgradient einen Wärmestrom, bei der elektrischen Leitung ein Ladungsgradient einen elektrischen Strom, bei der Diffusion ein Dichtegradient einen Teilchenstrom und bei der Viskosität ein Impulsgradient in einer Strömung eine Impulsübertragung und damit eine Kraft.

2. Wärmetransport (makroskopische Betrachtung)

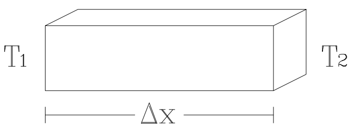

Abb. 211: Wärmeleitung in einem Stab

a) Wärmeleitungsgleichung

Wir betrachten ein eindimensionales Problem, etwa einen Stab, der an der einen Seite geheizt, an der anderen gekühlt wird. Der Außenmantel sei isoliert. Im stationären Fall stellt sich eine zeitunabhängige Temperaturverteilung ein. Der Wärmestrom ist dem Temperaturgradienten proportional: $\Phi_u \sim \frac{\Delta T}{\Delta x}$. Man schreibt

$$\boxed{\Phi = -k\frac{dT}{dx}}$$

Das negative Vorzeichen berücksichtigt die Tatsache, daß der Wärmestrom in Richtung abnehmender Temperatur fließt. k nennt man den Wärmeleitungskoeffizienten. Da der Wärmeverlust der Temperaturdifferenz an beiden Seiten einer Wand proportional ist, ist es zur Vermeidung von Wärmeverlusten angesagt, diese möglichst klein zu halten, also z.B. die Kesseltemperatur einer Heizungsanlage möglichst niedrig zu halten. Außerdem verwendet man natürlich geeignete Dämmaterialien, d.h. Materialien mit kleinem k. Der Wärmeleitungskoeffizient wird experimentell bestimmt. In einfachen System wie idealen Gasen läßt er sich berechnen. Die Wärmeleitungsgleichung ist ähnlich aufgebaut wie die Gleichung für elektrische

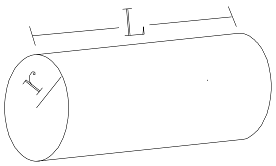

Abb. 212: Wärmeleitungsproblem in Zylindersymmetrie

Leitfähigkeit. Man kann also den stationären dreidimensionalen Fall analog zum elektrischen Problem berechnen.

Beispiel: Radiale Temperaturverteilung in einem langen Rohr, das im Innern auf erhöhter Temperatur gehalten wird $\frac{dT}{dr} = -\frac{\dot{Q}}{2\pi r L k}$

Da $\dot{Q}$ im stationären Fall konstant ist, ergibt sich durch Integration ein logarithmisches Temperaturprofil.

b) Wärmediffusion

Überläßt man einen Körper mit einer Temperaturverteilung sich selbst, so wird er in einem instationären Vorgang in den Gleichgewichtszustand übergehen, d.h. die Temperatur ist vom Ort und der Zeit abhängig. Im eindimensionalen Fall ergibt sich die Temperaturänderung in

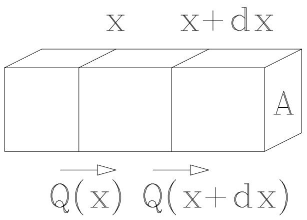

Abb.213: Zur Ableitung der Diffusionsgleichung

einem Massenelement $dm = \rho A dx$ durch die Differenz der Wärmeströme, die bei x zufließen und bei x + dx abfließen.

$$\Delta Q(x) = -kA\frac{\partial T}{\partial x}\Delta t$$

$$\Delta Q(x+dx) = -kA\frac{\partial}{\partial x}\left(T + \frac{\partial T}{\partial x}dx\right)\Delta t$$

Die Differenz ist nach der Definition der spezifischen Wärmekapazität c gleich

$$c\,dm\Delta T = c\rho A dx\Delta T$$

$$kA\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}dx\Delta t = c\rho A dx\Delta T$$

Hieraus ergibt sich die Diffusionsgleichung für T

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho c}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}}$$

Die gleiche Form hat die Gleichung für Teilchendiffusion

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$$

(Das sogenannte 2. Ficksche Gesetz, Adolph Fick 1829 - 1901)

Für Magnetfelder in einer leitfähigen Flüssigkeit kann man aus den Maxwellschen Gleichungen eine Diffusionsgleichung herleiten, wenn der Verschiebungsstrom vernachlässigbar ist:

$$rot\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{B}}$$

$$rot\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

Ersetzt man j in der zweiten Gleichung durch die dritte Gleichung und bildet man von dieser die Rotation, um **E** mit Hilfe der ersten Gleichung zu eliminieren, erhält man

$$rotrot\mathbf{B} = -\mu_0\sigma\,\dot{\mathbf{B}}$$

Wegen $rotrot\mathbf{B} = \nabla(\nabla B) - \nabla^2 B$ und $div\mathbf{B} = 0$ ergibt sich die Diffusionsgleichung

$$\boxed{\nabla^2\mathbf{B} = \mu_0\sigma\,\dot{\mathbf{B}}}$$

mit der man das Eindringen des Sonnenwindes in das Erdmagnetfeld oder das Eindringen eines Magnetfeldes in eine Hochfrequenzabschirmung berechnen kann.

Für eine Abschätzung setzt man

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \approx \frac{1}{L^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \approx \frac{1}{t_0}$$

wobei L eine typische räumliche und t_0 eine typische zeitliche Ausdehnung ist. Man erhält

$$L = \sqrt{\mu_0\sigma}\,\sqrt{t_0}$$

c) Experimentelle Bestimmung von k

Die Wärmeleitfähigkeit mißt man mit der oben beschriebenen stationären Anordnung. Die Probe wird an der einen Seite geheizt, an der anderen gekühlt. Durch Messung der Temperaturen an beiden Seiten und der von der Heizung abgegebenen Wärmemenge ergibt sich k. Die zeitliche Abstrahlung macht bei Metallen einen vernachlässigbaren Effekt. In anderen Fällen kann man sie durch Isolierung oder durch eine zusätzliche Heizung verringern. Es zeigt sich, daß Stoffe, die eine gute elektrische Leitfähigkeit besitzen, auch gute Wärmeleiter sind. Nach dem Wiedemann-Franz-Gesetz sind k und σ zueinander proportional. (Gustav Wiedemann

1826 - 1899, Rudolph Franz 1827 - 1902). Daher haben Metalle eine hohe Wärmeleitfähigkeit, Isolatoren wie Glas eine geringe (s. Tabelle II)

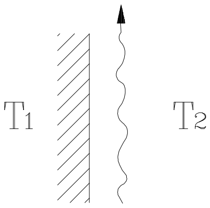

Abb.214: Wärmeübergang an einer Fensterscheibe

Wärmeleitfähigkeit in J/msK

Ag	Cu	Fe	Glas	H_2O	Glaswolle	Luft
421	381	40	0,7	0,6	0,04	0,03

d) Wärmeübergang mit Konvektion

-

Bei einer Wärmeübertragung zwischen einer festen Wand und einem Gas wie bei einem Heizkörper oder einer Fensterscheibe sind verschiedene Prozesse beteiligt. Man faßt ihren Effekt in der Wärmeübergangszahl h zusammen und schreibt

$$\dot{Q} = -hA\Delta T$$

h ist von der Oberflächenbeschaffenheit, der Lage der Wand (senkrecht oder horizontal) und der Strömungsgeschwindigkeit abhängig. Eine Dimensionsanalyse zeigt, daß bei Systemen aus fester Wand und Gas $h \sim (\Delta T)^{1/4}$. Bei Glas-Luft $h = 2(\Delta T)^{1/4} J/sm^2K$. Bei einer einzelnen Glasscheibe entsteht die Haupttemperaturdifferenz in der Konvektionszone, während die Temperaturdifferenz zwischen den Oberflächen der Scheibe meist sehr viel kleiner ist. Die Scheibe nimmt etwa die mittlere Temperatur zwischen außen und innen an.

e) Strahlung

Jeder Körper wandelt innere Energie in elektromagnetische Strahlung um und strahlt sie ab. Die Abstrahlung von Festkörpern beschreibt man am besten über die eines sogenannten schwarzen Strahlers. Ein schwarzer Strahler ist ein Körper, der alle auf ihn fallende Strahlung absorbiert. Er wird durch einen Hohlraum mit einem kleinen Loch realisiert. Seine Strahlungsleistung hängt nur von der Temperatur ab, nicht von der Form oder dem Material des Hohlraums. Die gesamte Strahlungsleistung pro Fläche wird durch das Stefan-Boltzmannsche Gesetzt gegeben (J.Stefan 1835 1893).

$$\frac{P}{A} = \sigma T^4$$

Für einen beliebigen Festkörper schreibt man

$$\frac{P}{A} = \varepsilon\sigma T^4$$

worin ε der gemittelte Emissionskoeffizient des Körpers ist. Er ist nach Kirchhoff gleich dem Absorptionskoeffizienten.

3. Transportkoeffizienten für Gase (mikroskopische Betrachtung)

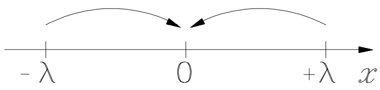

Abb. 215: Ein Stoß bringt Information über die Verhältnisse im Abstand der freien Weglänge

a) Energieübertrag durch Stöße

Wir erklären die physikalischen Vorgänge am eindimensionalen Modell der Wärmeleitung und übertragen die Ergebnisse auf die anderen Transportkoeffizienten.

In einem Gas herrsche ein Temperaturgradient in Richtung x. Die innere Energie der Teilchen U ist dann von x abhängig. Die Teilchen fliegen eine gewisse Strecke λ frei bis sie stoßen. Bei einem Stoß können sie Energie auf den Stoßpartner übertragen oder von ihm Energie

aufnehmen. Im Mittel bleibt in einem homogenen Medium die Energie pro Teilchen u = U/n gleich. Bei einem Medium mit Temperaturgradient deponiert ein Teilchen im Mittel seine Energie u(x) an einem Ort, der von dem Ausgangspunkt x eine Entfernung λ hat. Z.B. an die Stelle x = 0 bringen Teilchen die Energie mit, die bei ±λ herrscht. Diese ist

$$u(-\lambda) = u(0) - \lambda \frac{du}{dx}$$

$$u(+\lambda) = u(0) + \lambda \frac{du}{dx}$$

Der Teilchenstrom in x-Richtung ist (s. Kap. B/2a) $\frac{1}{6}n\mathrm{v}$, wobei v die mittlere thermische Geschwindigkeit ist. Die an die Stelle x = 0 übertragene Energie wird also

$$\frac{1}{6}n\mathrm{v}u(-\lambda) - \frac{1}{6}n\mathrm{v}u(\lambda) = -\frac{1}{3}\lambda n\mathrm{v}\frac{du}{dx}$$

der Fluß der inneren Energie also

$$\boxed{\Phi_u = -\frac{1}{3}\lambda n\mathrm{v}\frac{du}{dx}} \qquad (2)$$

Für ein ideales Gas ist $u = \frac{f}{2}k_B T$ und daher

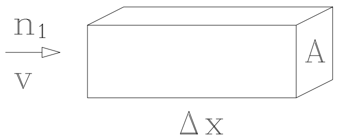

Abb. 216: Die Anzahl der Stöße in einem Teilchenstrahl

$$\Phi_u = \Phi = -\frac{1}{3}\lambda n\mathrm{v}\frac{f}{2}k_B\frac{\partial T}{\partial x} \qquad (3)$$

Man erhält also die Form der Wärmeleitungsgleichung, wobei der Wärmeleitungskoeffizient durch charakteristische Daten des Moleküls und die freie Weglänge λ ausgedrückt wird. Um genauere Aussagen machen zu können, versuchen wir im folgenden auch die freie Weglänge durch Moleküldaten auszudrücken.

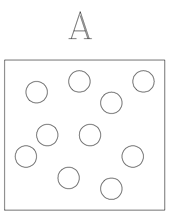

Abb.217: Die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer

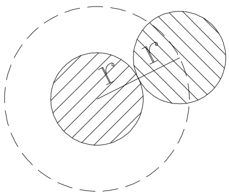

Abb. 218: Der Wirkungsquerschnitt beim Stoß zweier gleichgroßer Kugeln

b) Freie Weglänge

Wir stellen uns zunächst vor, daß in ein Gasvolumen mit einer Teilchendichte n von außen Teilchen eingeschossen werden. Die Gaszelle sei so kurz, daß die Projektionen der Teilchen nicht überlappen. Dann ist die Wahrscheinlichkeit für ein Strahlteilchen, einen Stoß zu erleiden, gleich dem Verhältnis der Querschnittsflächen aller Teilchen $n\sigma \cdot x \cdot A$ zur Gesamtfläche A. Für punktförmige Strahlteilchen ist diese Fläche, der sogenannte Wirkungsquerschnitt gleich πr^2.

Für Strahlteilchen vom Radius r ist er $\sigma = \pi(2r)^2$, da alle Strahlteilchen, die in einer Entfernung kleiner 2r am Mittelpunkt eines Gasteilchens vorbeifliegen, einen Stoß erleiden (Abb. 218). Die Wahrscheinlichkeit für ein Strahlteilchen für einen Stoß ist also $nx\sigma$.

Die freie Weglänge ist die Länge x des Volumens, bei der die Stoßwahrscheinlichkeit 1 ist, d.h. $n\lambda\sigma = 1$

$$\boxed{\lambda = \frac{1}{n\sigma}}$$

Beispiel: Für ein Gas mit $2\,r = 10^{-8}$ cm und einer Teilchendichte $3 \cdot 10^{19}$ cm^{-3} ist

$$\lambda = \frac{1}{3 \cdot 10^{19} \pi 10^{-16}} = 10^{-4} cm$$

d.h. bei einem Druck von 1 mbar ist die freie Weglänge etwa 1 mm.

c) Abhängigkeit der Transportkoeffizienten von n und T

α) Wärmeleitung

Für die Wärmeleitung eines idealen Gases folgt aus Gleichung (3)

$$k = \frac{1}{3}\lambda n \mathrm{v} \frac{f}{2} k_B$$

k_B ist die Boltzmannkonstante

mit $\lambda = 1/n\sigma$ erhält man

$$\underline{k = \frac{1}{6}\frac{\mathrm{v}}{\sigma} f k_B}$$

Die Wärmeleitung ist unabhängig von der Dichte der Teilchen und damit vom Gasdruck. Da $\frac{1}{2}m\mathrm{v}^2 = \frac{3}{2}kT$, steigt sie mit der Temperatur und nimmt mit der Molekülmasse ab. Wenn die freie Weglänge größer wird als der Abstand der Wände eines Vakuumgefäßes L, wird die Energie direkt von einer Wand zur gegenüberliegenden transportiert. Man kann also Gl. (3) benutzen, wenn man für λ L einsetzt.

$$k = \frac{1}{6} L \mathrm{v} n f k_B$$

Die Wärmeleitfähigkeit ist jetzt der Dichte proportional. Der Bereich, in dem die Transportkoeffizienten der Dichte proportional sind, heißt der Knudtsenbereich. Man nutzt diesen Effekt zur Druckmessung über die Wärmeleitung aus.

β) Diffusionskoeffizient

Um zur Diffusionsgleichung zu kommen, ersetzt man in Gl. 2 u durch n

$$\Phi_n = -\frac{1}{3}\lambda n \mathrm{v} \frac{dn}{dx} = -\frac{1}{3}\frac{\mathrm{v}}{\sigma}\frac{dn}{dx}$$

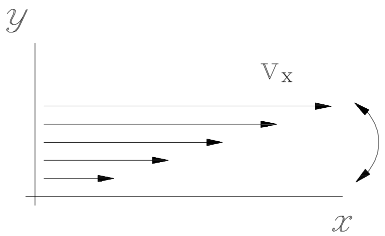

Abb. 219: Newtonsche Definition der Viskosität

und erhält das 1. Ficksche Gesetz mit der Diffusionskonstanten

$$D = \frac{1}{3}\frac{\mathrm{v}}{\sigma}$$

mit v~ $\sqrt{\frac{T}{m}}$ wird $D \sim \sqrt{\frac{T}{m}}$ unabhängig von n.

γ) Viskosität

Die Viskosität definiert man in einer Situation, in der sich eine Strömungsgeschwindigkeit senkrecht zur Geschwindigkeitsrichtung ändert. Im Teilchenbild nehmen Teilchen, die Schichten mit konstantem v_x wechseln, deren Impuls mit und übertragen ihn an eine Schicht, die die Entfernung λ hat. Um die Viskosität η durch Moleküldaten auszudrücken, ersetzt man in Gl. 3 u durch $mv_x = p_x$ und erhält

$$\Phi_p = \frac{\dot{p}_x}{A} = \frac{F_x}{A} = -\frac{1}{3}\lambda_{nm} \mathrm{v} \frac{d\mathrm{v}_x}{dy}$$

Man erkennt, daß man den Newtonschen Ansatz für Viskosität herausbekommt mit

$$\eta = \frac{1}{3}\mathrm{v}\lambda_{nm},\ \eta \sim \sqrt{mT}$$

Die Viskosität von Gasen ist außerhalb des Knudtsenbereichs unabhängig vom Druck, steigt mit der Temperatur und mit der Molekülmasse