

Teil II: Wärmelehre

KAPITEL A

Einleitung

1. Womit beschäftigt sich die Wärmelehre?

Die Wärmelehre befaßt sich mit dem Verhalten von Körpern, wobei gegenüber der Mechanik als wesentlich definieren: Als proportional zur mittleren kinetischen Translationsenergie der Moleküle

$$\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}kT \quad ,$$

wobei v die Geschwindigkeit der zufälligen Bewegung relativ zum Schwerpunkt ist. Mit der auf der Mechanik benötigt man die Koordinaten und Geschwindigkeiten aller Teilchen $(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i)$ mit $i=1, \dots, N$. Über die Mittelwertbildung über die Temperatur. Der Vorteil der mikroskopischen Beschreibung ist die gedanklich klare Struktur und die Möglichkeit, die Eigenschaften der einzelnen Teilchen keiner direkten Messung gegenüberzustellen. Andererseits sind die Koordinaten und Geschwindigkeiten der einzelnen Teilchen keiner direkten Messung gegenüberzustellen. Ein großer Teil der Thermodynamik wurde sogar entwickelt, bevor die mikroskopische Thermodynamik befaßt wurde.

Neben der Verbindung zur Mechanik gibt es Zusammenhänge mit dem Elektromagnetismus. So spielen thermoelektrische Effekte verknüpfen die beiden Gebiete der Physik. Ein wichtiger Zusammenhang mit der Thermodynamik besteht im thermischen Gleichgewicht.

KAPITEL B

Temperatur

1. Makroskopische Betrachtung

a) Gleichgewicht

Zur makroskopischen Definition der Temperatur kommen wir nicht ohne den Begriff des thermischen Gleichgewichts. Zwei Systeme im thermischen Gleichgewicht, die über eine diathermische Wand verbunden sind, bilden ein Gesamtsystem im thermischen Gleichgewicht. Man sagt dann, sie haben thermisches Gleichgewicht vorliegt, sagt man, sie haben gleiche Temperatur. Man kann also jeder zwei Systeme nach ihrer Kontaktierung im Gleichgewicht bleiben oder nicht. Diese Größe heißt Temperatur.

b) Zustandsvariable

Zustandsvariable sind die makroskopischen Parameter, mit denen man ein System beschreiben kann. Bei einem Gas sind dies p, V, n, ϑ . Bei einer paramagnetischen Substanz sind dies B, M, ϑ . σ ist die Oberflächenspannung, A die Fläche; bei einem Widerstandsdraht $\sigma = F/A, l, \vartheta$. Die Zustandsgleichung heißt die Zustandsgleichung. Bevor wir eine Temperaturskala angegeben haben, können wir die Zustandsgleichung $G(p, V, n, \vartheta) = 0$ angeben.

c) Temperaturskala

Bei der Definition einer Temperaturskala gibt es eine Reihe im Prinzip willkürlicher Maßnahmen. Man kann

- * Man wählt eine Thermometersubstanz ("Standardthermometersubstanz"), die sich über einen weiten Temperaturbereich verhalten kann. z.B. V, p , ϑ , σ , M , ϑ .
- * Man wählt eine der beiden Zustandsvariablen x oder y konstant bleibt; die andere ist dann die Temperatur. Bei einem Gasthermometer ist $p = \text{const}$, und man mißt die Temperatur über die Volumenausdehnung; bei einem Gasthermometer ist $V = \text{const}$, und man mißt die Temperatur über den Druck.
- * Man wählt eine thermometrische Funktion $\vartheta(x)$, die angibt, wie die Temperatur mit $\vartheta(x) = ax$ den Zustandsvariablen x zugeordnet wird. Funktionen sind $\vartheta(x) \sim \lg x$ oder $\vartheta(x) \sim 1/x$. Die absolute Nullpunkt ins Unendliche rücken würde.
- * Schließlich benötigt man einen oder mehrere Fixpunkte, d.h. Temperaturen, die sich reproduzieren lassen. Die Celsius-Skala angegeben.

Gefrierpunkt von H_2O	(0° C)
Siedepunkt von H_2O	(100° C)
Q	(-182° C)
S	(440° C)
Au	(1063° C)

α) Einfache Thermometerskala

Vor 1954 wurden für die amtliche Temperaturskala 2 Fixpunkte und deren Temperaturdifferenz benutzt. Die Temperaturdifferenz auf 100° festgesetzt wurde. Als System diente Helium, dessen Druck $x = p$ bei konstantem Volumen $\vartheta(x) = ax$. Eine beliebige Temperatur ergibt sich dann aus

$$\frac{\vartheta(x)}{\vartheta(x_2) - \vartheta(x_1)} = \frac{x}{x_2 - x_1}$$

β) Moderne Gasthermometerskala

Die moderne Gasthermometerskala benutzt einen Fixpunkt x_1 und seine Temperatur $\vartheta(x_1)$. Als Fixpunkt flüssiger und gasförmiger Aggregatzustand gleichzeitig existieren. Der Tripelpunkt läßt sich genauer

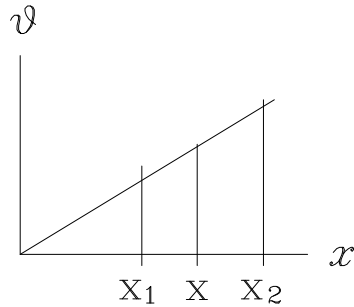


Abb. 185: Eine lineare thermometrische Funktion

$\vartheta = 273,16$ zugeordnet. Die Temperatur ist, wenn man als thermometrische Funktion die Proportionalität

$$\frac{\vartheta}{273,16} = \left(\frac{p}{p_{tr}} \right)_{V=const}$$

Das Gasthermometer besteht aus dem Gasvolumen V und dem Flüssigkeitsmanometer. Durch Anheben c bleibt. Der Druck wird an der Höhe h des Flüssigkeitsmanometers abgelesen ($p = p_0 + \rho g h$).

δ) Die ideale Gastemperatur

Nach dem unter b) beschriebenen Prinzip arbeitende Gasthermometer zeigen eine Temperatur, die noch

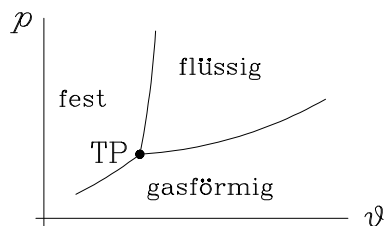


Abb. 186: Der Tripelpunkt von Wasser

der Druck im Thermometer ist. Mißt man eine Temperatur, z.B. die Siedepunkttemperatur, indem man den fangsdruck am Tripelpunkt p_{tr} variiert, so stellt man fest, daß der Wert, den man durch Extrapolation der nennt man die ideale Gastemperatur. Sie ist für praktische Zwecke mit der Kelvin-Skala identisch, die üb

$$T = \vartheta = 273,16 \lim_{p_{tr} \rightarrow 0} \left(\frac{p}{p_{tr}} \right)_{V=const}$$

$$T = 273,16 \lim_{p_{tr} \rightarrow 0} \left(\frac{V}{V_{tr}} \right)_{p=const}$$

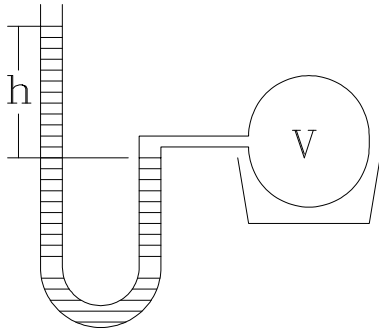


Abb. 187: Gasthermometer

e) Thermometer

Mit der nun bekannten Temperaturskala kann man für andere Thermometersubstanzen die Thermometerfunktion festlegen. Die Konstanten des Polynoms kann man in Nachschlagewerken finden. Solche Thermometer sind entweder für einen bestimmten Temperaturbereich.

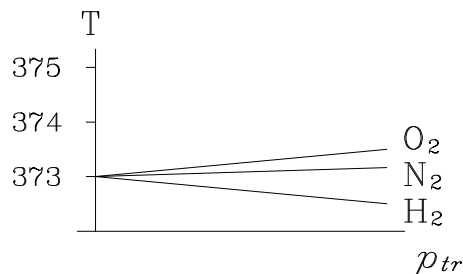


Abb. 188: Extrapolation zu verschwindendem Druck

Ein Widerstandsthermometer nutzt die Widerstandsänderung mit der Temperatur aus

$$R = R_0(1 + A\vartheta + B\vartheta^2)$$

Häufig benutzt wird Platin. Der Anwendungsbereich liegt zwischen -200°C und $+1200^\circ\text{C}$. Heute werden auch andere Metalle verwendet.

Ein Thermoelement (s. Kap. I) nutzt die Kontaktspannung zwischen zwei Metallen aus. In einem Stromkreis mit konstanter Temperatur kompensieren sich die verschiedenen Spannungen. Bei ungleicher Temperatur, die mit der Temperaturdifferenz wächst. Ein Thermoelement sollte möglichst stromlos betrieben werden. Typische Materialien sind Kupfer und Konstantan. Temperaturbereich für den Einsatz $0 - 1000^\circ\text{C}$.

$$U = a + b\vartheta + c\vartheta^2$$

Ein einfaches Thermometer liefert ein Bimetallstreifen, d.h. ein Streifen, der aus zwei Metallen mit unterschiedlichen Ausdehnungskoeffizienten besteht.

Es gibt Stoffe, die ein anomales Verhalten bezüglich ihrer thermischen Ausdehnung zeigen und deshalb als Negative-thermische Ausdehnungsmaterialien bezeichnet werden. Ein Beispiel ist Wasser und Gummi, das sich bei Erwärmung zusammenzieht.

f) Zustandsgleichung

Die Form der Zustandsgleichung folgt nicht aus der makroskopischen Theorie. Sie muß experimentell durch Messungen werden häufig benutzt, um die Änderungen einer Zustandsvariablen aus der einer anderen unter bestimmten Bedingungen eines Gases, d.h. Kompression ohne Wärmeaustausch mit der Umgebung aus der Volumenänderung ableiten zu können. Wir geben im folgenden Zustandsgleichungen für einige Systeme an, zunächst ohne sie zu begründen.

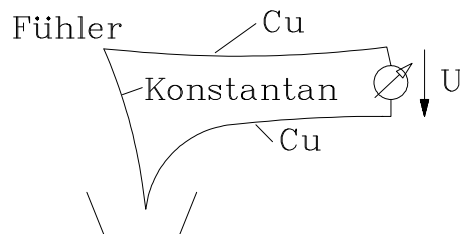


Abb. 189: Thermoelement

α) Ideales Gas

$$pV = \nu RT$$

$R = 8,31 \text{ J/K mol}$, allgemeine Gaskonstante

ν : Anzahl der Mole

1 mol: Molekulargewicht in g

$\nu = 1, p = 1 \text{ bar}, \rightarrow V = 22,7 \text{ l}$

In dem idealen Gasgesetz sind das Boyle-Mariottesche Gesetz (Robert Boyle 1627 - 1691, E. Mariotte 1620 - 1683) $p = \text{const}$ (Joseph Gay-Lussac 1778 - 1850)

$$\frac{V}{T} = \frac{V_0}{T_0}$$

enthalten.

Das ideale Gasgesetz ist für Temperaturen weit vom Kondensationspunkt gut erfüllt. In der Nähe des Kondensationspunktes

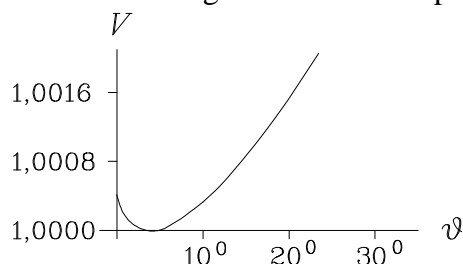


Abb. 190: Thermische Ausdehnung von Wasser

van der Waals 1837 - 1923)

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT$$

wobei v das Volumen eines Mols ist und die Konstanten a und b für die verschiedenen Gase unterschiedlich sind.

β) Paramagnetische Substanz

Für Temperaturen weit vom Curie-Punkt gilt das Curie-Gesetz ((Pierre Curie 1859 - 1906)

$$M = C \frac{B}{T}$$

B ist das Magnetfeld und C die Curiekonstante, M die Magnetisierung.

In der Nähe des Curiepunktes gilt besser das Weißsche Gesetz (Pierre Weiss 1865 - 1940)

$$M = C \frac{B}{T - N\rho C}$$

ρ ist die Dichte und N eine Konstante.

γ) Oberflächenfilme

Bei Oberflächenfilmen gilt

$$s = s_0 \left(1 - \frac{\vartheta}{\vartheta_0}\right)^n$$

mit $1 < n < 2$. s ist die Oberflächenspannung.

2. Mikroskopische Betrachtung

a) Naives Modell des idealen Gases

Um zu zeigen, wie aus einer mikroskopischen Betrachtung Gesetze für makroskopische Größen abgeleitet werden können, nehmen wir an, daß die Teilchen aus gleichen Massenpunkten der Masse m und der mittleren Geschwindigkeit v. Wir nehmen an, daß die Teilchen, die auf eine Wand zufliegen, übertragen bei elastischer Reflexion pro Stoß den

$$\Delta P = 2mv$$

Bei inelastischem Stoß wäre der Impulsübertrag $\Delta P = mv$, und das Teilchen würde an der Wand haften. Bei elastischem Stoß wäre der Impulsübertrag $\Delta P = 2mv$, und das Teilchen würde an der Wand haften. Bei elastischem Stoß wäre der Impulsübertrag $\Delta P = 2mv$, und das Teilchen würde an der Wand haften. Bei elastischem Stoß wäre der Impulsübertrag $\Delta P = 2mv$, und das Teilchen würde an der Wand haften.

Bei einer Teilchendichte von n Teilchen, die auf Δt e Wand zufliegen, treffen die Wand in der Zeit

$$nA\Delta t$$

Teilchen. Der gesamte Impulsübertrag ist also

$$\Delta P = nA\Delta t \cdot 2mv$$

die Kraft ist $\frac{\Delta P}{\Delta t}$ und der Druck $p = F/A = 2nmv^2$

Der Druck ist nach Erfahrung unabhängig von der Form des Gefäßes. Wir berechnen ihn daher für einen beliebigen Querschnitt der Geschwindigkeit entlang der Koordinatenachsen und beachten wir, daß

nur die Geschwindigkeiten mit dem korrekten Vorzeichen zum Druck auf eine Wand beitragen, so erkennen wir

$$p = \frac{1}{3}nmv^2 = \frac{1}{3} \frac{N}{V}mv^2$$

$$pV = \frac{1}{3}Nm\bar{v}^2 = \frac{1}{3}vN_A m\bar{v}^2$$

v ist also eine Zahl, die proportional zur Teilchenzahl ist. Für $N = N_A$ ist $v = 1$. Die Stoffmenge ist dann Anzahl Teilchen enthält.

Man schreibt

$$pV = vRT$$

Man nennt N_A mol die Avogadrozahl (Amadeo Avogadro 1776 - 1856)

$$RT = \frac{2}{3}N_A \frac{1}{2}m\bar{v}^2; \frac{1}{2}m\bar{v}^2 = \frac{3R}{2N_A}T = \frac{3}{2}kT$$

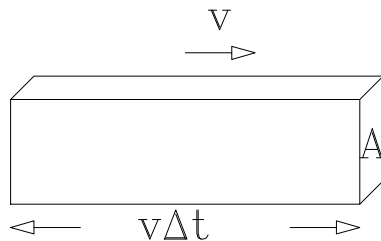


Abb. 191: Alle Teilchen, die auf A treffen

$$R = N_A k$$

$R = 8,3 \text{ J/K mol}$ ist die ideale Gaskonstante.

$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ ist die Boltzmann-Konstante (Ludwig Boltzmann 1844 - 1906).

b) Wahrscheinlichkeit

Der Schwachpunkt in der naiven Ableitung besteht darin, daß die "mittlere" Geschwindigkeit überhaupt unterschiedliche Geschwindigkeiten. Um hierüber mitteln zu können, muß man angeben, wie diese Verteilungen untereinander und mit der Wand dauernd ihre Geschwindigkeit ändern und daß die entstehende Verteilung sich, etwa geeignetes Würfeln reproduzieren können. Dies wollen wir im folgenden versuchen.

α) Wurf einer Münze

Beim Wurf einer Münze haben wir die Vorstellung, daß bei sehr vielen Würfen die Hälfte die Zahl, die Fäule können wir so zu diesem Ergebnis kommen:

Die möglichen Ereignisse sind: Die Münze zeigt eine Zahl oder ein Wappen. Die Zahl der möglichen Ereignisse ist $z_m = 2$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein günstiges Ereignis auftritt, erhalten wir

$$W(z) = \frac{z_g}{z_m} = \frac{1}{2}$$

β) Wurf zweier Münzen

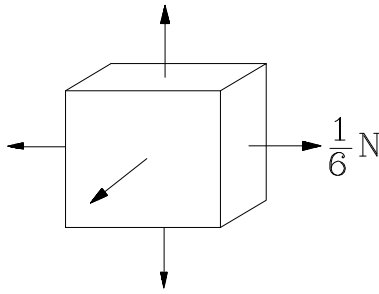


Abb. 192: Die Anzahl der Teilchen, die auf eine Würfelfläche treffen.

Bei zwei Münzen verfahren wir ebenso. Wollen wir z.B. wissen, wie wahrscheinlich es ist, daß beide Münzen "Z" (oder "Kopf", "Ensemble") zeigen? Dies wären hier 4, und die Teilmenge, die uns interessiert, wäre hier ein Ereignis. Die Wahrscheinlichkeit ist dann $\frac{4}{2^2} = \frac{1}{2}$.

γ) Regeln zur Wahrscheinlichkeit

Interessieren wir uns dafür, wie wahrscheinlich es ist, daß ein Ereignis auftritt, das aus zwei Ereignissen z.B. "Z" und "K" auftritt, so addieren sich gemäß der oben eingeführten Abzählmethode die Einzelwahrscheinlichkeiten

$$W = W(1) + W(2) \quad (1 \text{ oder } 2 \text{ findet statt})$$

Da die Summe aller möglichen Ereignisse gleich dem Nenner ist, erhält man

$$\sum_{i=1}^N W(i) = 1$$

Wir sagen, die Wahrscheinlichkeit ist auf 1 normiert. Will man hingegen die Wahrscheinlichkeit für alle Ereignisse berechnen, da bei jedem Eintreffen von Ereignis 1 der Bruchteil der Fälle bekannt ist, so kann man dies auch als das Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten in Beispiel a deuten.

c) Die Binominalverteilung

Eine der wichtigsten Verteilungen ist die Binominalverteilung. Auf ihr fußt die Maxwell- und die Poisson-Verteilung. Im einfachsten Fall ist sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Anzahl der geworfenen Zahlen bei N Würfen, bei dem die Wahrscheinlichkeiten, eine Zahl oder ein Wappen zu werfen, nicht gleich sind. Wir untersuchen, mit welcher Wahrscheinlichkeit er von insgesamt N Schritten n nach rechts macht. Im Gegensatz zum Beispiel a lassen ihn beispielsweise 10 Schritte machen und notieren die Anzahl der Schritte nach rechts n . Wir untersuchen, wie oft ein bestimmter Ausgangspunkt angefangen wird. Die meisten dieser Versuche werden $n = 5$ oder eine Zahl in der Nähe von $n = N/2$ sein, d.h. $W(n)$ ist im Maximum.

Die Wahrscheinlichkeit für einen Schritt nach rechts sei p , für einen Schritt nach links q mit $p + q = 1$. Die Wahrscheinlichkeit für genau n_1 Schritte nach rechts und n_2 Schritte nach links sei $W(n_1, n_2)$. Die Wahrscheinlichkeit für genau diese Konfiguration $p^{n_1} \cdot q^{n_2}$ ist das Produkt der verschiedenen Wahrscheinlichkeiten für den Wurf einer Zahl oder eines Wappens haben (p, q). Die Wahrscheinlichkeit für genau diese Konfiguration ist $W(n_1, n_2) = \frac{N!}{n_1! n_2!} p^{n_1} q^{n_2}$.

Um die Wahrscheinlichkeit auszurechnen, daß genau n_1 Schritte nach rechts, n_2 Schritte nach links gemacht werden, müssen wir die Anzahl der Möglichkeiten abzählen, die n_1 Rechtsschritte und n_2 Linksschritte enthalten. Zunächst zählen wir die Gesamtzahl der Möglichkeiten ab,

erste Element und stellen es nacheinander auf einen Platz weiter, ohne die Reihenfolge der anderen zu ändern. In der ersten Fälle gibt es N-1 Möglichkeiten, das 2. Element zu versetzen. Insgesamt also $N(N-1) \dots 2 \cdot 1 = N!$ zu. Hierbei sind allerdings innerhalb der Schritte nach rechts $n_1!$ und der Schritte nach links $n_2!$ Permutationen der Reihenfolge. Wir dividieren die Wahrscheinlichkeit

$$W(n_1, n_2) = \frac{N!}{n_1! n_2!} p^{n_1} q^{n_2}$$

Wir schreiben diese noch Variable mit n

$$W(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{(N-n)}$$

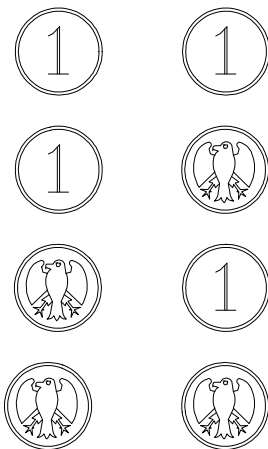


Abb.193: Die möglichen Ereignisse bei dem Wurf von zwei Münzen.

$W(n)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass der Betrugene nach insgesamt N Schritten n Schritte nach rechts gemacht hat. Diese Verteilung heißt Binominalverteilung, denn die Zahlenwerte $W(n)$ sind identisch mit den Binominalkoeffizienten

$$(p + q)^N = \sum_{n=0}^N \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n q^{(N-n)}$$

Sie tritt überall in der Physik da auf, wo sich ein System mehrmals zwischen zwei Alternativen entscheidet (Galton 1822 - 1911)

Um makroskopische Werte zu erhalten, muß man Mittelwerte bilden. Haben wir eine Größe $F(n)$, die von der Stärke seiner Stimme, so ist der Mittelwert wie üblich

$$\langle F(n) \rangle = \frac{\sum W(n_i) F(n_i)}{\sum W(n_i)} = \sum W(n_i) F(n_i)$$

Der Nenner ist wegen der Normierung 1.

d) Die Gaußverteilung

α) Ableitung der Gaußverteilung

Für $N \gg 1$ geht die Binominalverteilung in eine Gaußverteilung über. Da für $N \gg 1$ die Verteilung sehr eng liegt da, wo $W(n)$ sein Maximum besitzt.

$$n = \langle n \rangle + \eta; \left(\frac{dW}{dn} \right)_{\langle n \rangle} = 0$$

Bei Entwicklung zeigt es sich, daß es günstiger ist, statt $W(n) \ln(W(n))$ zu entwickeln. Um dies plausibel vor. Entwickeln wir $\ln W$ bis zum 2. Glied und das lineare Glied also noch sehr groß ausfallen. Die Reihe konvergiert. $\ln(1+g) = g - \frac{1}{2}g^2 + \dots$, erhält man eine gut konvergierende Reihe.

Die Entwicklung von $\ln W$ bis zur 2. Ordnung hat die Form

$$\ln W(n) = (\ln W)_{\langle n \rangle} + \left(\frac{d \ln W}{dn} \right)_{\langle n \rangle} \eta + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2 \ln W}{dn^2} \right)_{\langle n \rangle} \eta^2 + \dots \quad (1)$$

Setzt man die Binominalverteilung ein, erhält man rechts

$$\ln W = \ln N! - \ln n! - \ln(N-n)! + n \ln p + (N-n) \ln q$$

Die Ableitungen lassen sich mit dem einfachen Hilfsatz für (Stirling 1692 - 1770)

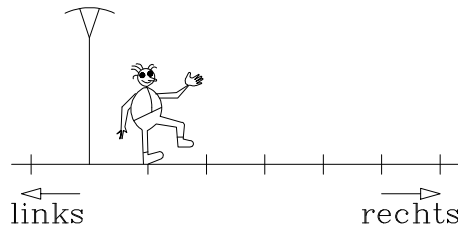


Abb. 194: Wie weit kommt der Betrunkene?

$$\frac{d \ln n!}{dn} \approx \frac{\ln(n+1)! - \ln n!}{1} = \ln \frac{(n+1)!}{n!} = \ln(n+1) \approx \ln n$$

damit wird

$$\frac{d \ln W}{dn} = -\ln n + \ln(N-n) + \ln p - \ln q \quad (2)$$

$$\frac{d^2 \ln W}{dn^2} = -\frac{1}{n} - \frac{1}{N-n} = -\frac{N}{n(N-n)} \quad (3)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite läßt sich vereinfachen. Da $\langle n \rangle$ bei dem Maximum von $W(n)$ liegt, ist

$$\left(\frac{d \ln W}{dn} \right)_{\langle n \rangle} = 0$$

Der zweite Term in (1) fällt also fort. Außerdem kann man $\langle n \rangle$ durch Np ersetzen, denn bildet man von (

$$-\ln \langle n \rangle + \ln(N - \langle n \rangle) + \ln p - \ln q = 0$$

$$p \frac{N - \langle n \rangle}{\langle n \rangle q} = \ln Np - \langle n \rangle p = \langle n \rangle q$$

a b c d
 b a c d
 b c a d
 b c d a

Abb. 195: Die Möglichkeiten, 4 unterscheidbare Elemente anzuordnen.

$$Np = \langle n \rangle (p + q) = \langle n \rangle$$

Der 3. Term in Gl. (1) wird mit (3) und dieser Beziehung

$$\frac{N}{\langle n \rangle (N - \langle n \rangle)} = \frac{N}{Np(N - p)} = \frac{1}{Npq}$$

Einsetzen in Gleichung (1) ergibt:

$$-\frac{1}{2Npq} \eta^2 = \ln W(n) - \ln W(\langle n \rangle)$$

$$W(\eta) = W(\langle n \rangle) e^{\frac{1}{2} \frac{\eta^2}{Npq}}$$

mit $\langle n \rangle = Np$

$\eta = n - \langle n \rangle = n - Np$

Dies ist die Gaußverteilung (Carl Friedrich Gauß 1777 - 1855)

β) Diskussion der Gaußverteilung

In unserem Problem des eindimensionalen "random Walk" gibt die Gaußverteilung die Wahrscheinlichkeit, n Schritte nach rechts, aus n zufälligen Schritten nach links und rechts zu erreichen

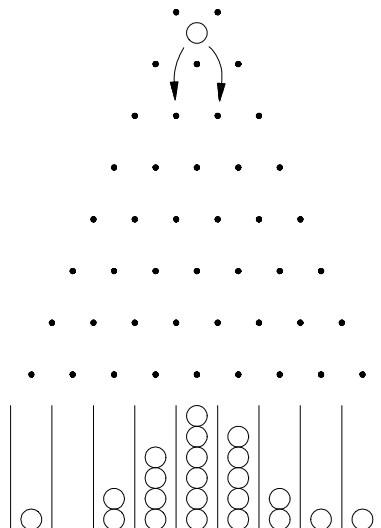


Abb.196: Das Galtonsche Brett

$$m = \eta = n - (N - n) = 2n - N$$

liegt. Um die Wahrscheinlichkeit auszurechnen, mit N Schritten m zu erreichen, braucht man nur in $W(n)$

$$n = \frac{1}{2(m+N)}$$

zu ersetzen.

$$\begin{aligned}\eta &= n - \langle n \rangle = \frac{1}{2}(m+N) - Np = \frac{1}{2}(m+N+2Np) \\ &= \frac{1}{2}[m+N(1+2p)]\end{aligned}$$

Zur Symmetrisierung des Ausdrucks wird in der runden Klammer 1 durch $p+q$ ersetzt

$$\eta = \frac{1}{2}[m+N(q-p)]$$

Die Wahrscheinlichkeit $p(m)$ m zu erreichen, hat dann die Form

$$\frac{P(m)}{P(\langle m \rangle)} = \exp\left\{-\frac{[m-N(p-q)]^2}{8Npq}\right\} = \exp\left\{-\frac{m-m_0}{m_e^2}\right\}$$

Es liegt also eine Gaußsche Glockenkurve vor, die bei $m_0 = N(p-q)$ ihren Maximumwert $\frac{P(m_0)}{P(\langle m \rangle)} = 1$ erreicht. Bei $m = m_e$ nimmt die Kurve

$$\frac{P(m)}{P(\langle m \rangle)} = \frac{1}{e}$$

$m_e = \sqrt{8Npq}$ ist also ein Maß für die Breite der Kurve. Je mehr Ereignisse stattgefunden haben, desto kleiner wird m_e . Die Verschiebung wird Null, wenn $p = q$, d.h. wenn die Schritte nach links und rechts gleich häufig sind.

e) Die kontinuierliche Gaußverteilung

α) Umschreiben auf x

Wenn im Ortsraum die Schrittweite sehr klein ist gegen die Ausdehnung der Kurve, kann man die Gaußverteilung nicht als diskrete Schrittzahl m beschreiben, sondern wie wahrscheinlich es ist, daß Δx Ereignisse man in m Schritten die Position $x = ml$. Bei genügend kleinen Schrittweiten Δx (im Grenzfall $\Delta x \rightarrow 0$) kann man die Gaußverteilung als kontinuierliche Gaußverteilung beschreiben.

$$\Delta Z = P(m)\Delta m = P(m)\frac{\Delta x}{l} = f(x)\Delta x$$

$f(x) = \frac{dZ}{dx}$ nennen wir die Verteilungsfunktion der Zahl der Ereignisse. Sie hat nach $\Delta x \rightarrow 0$ die Dimension einer Wahrscheinlichkeit pro Länge. Wenden wir diese Definition einer Verteilungsfunktion auf Geschwindigkeitsverteilung an, so erhält man

$$f(v)dv$$

die Anzahl von Teilchen mit Geschwindigkeiten zwischen v und $v + dv$.

$f(x)$ erhält man aus der Gaußverteilung, indem man m im Exponenten durch x/l ersetzt:

$$\frac{[m - N(p - q)]^2}{8Npq} = \frac{[x/l - N(p - q)]^2}{8Npq} = \frac{[x - Nl(p - q)]^2}{24Nl^2pq}$$

Hier $\mu = Nl(p - q)$ eine Verschiebung und

$$\sigma^2 = 4Nl^2pq$$

ein Maß für die Breite.

Die kontinuierliche Gaußverteilung hat damit die Form

$$f(x)dx = C e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

β) Normierung

C ist eine Konstante, die sich aus der notwendigen Normierung der Verteilungsfunktion

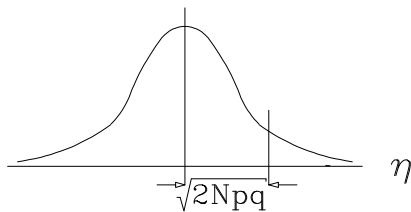


Abb. 197: Die Gaußverteilung

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

ermitteln läßt. Bei der Berechnung dieses oder ähnlicher Integrale benötigt man e^{-x^2} und e^{-x^2} für Integration zusammengestellt werden.

Zur Berechnung von

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

wird betrachtet.

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

Durch die Transformation auf Polarkoordinaten r und φ wird das Integral

$$I^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\varphi$$

das sich ebenfalls über die ganze Ebene erstreckt. Durch $\int d\varphi = 2\pi$ erhält man

$$I^2 = \pi \int e^{-t} dt = \pi$$

Die höhere ($n \neq 0$) kann man entweder durch partielle Integration auf dieses Integral zurückführen oder die

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-x^2/a^2} dx$$

ergibt

$$I_0 = \sqrt{\pi} a$$

$$I_1 = a^2$$

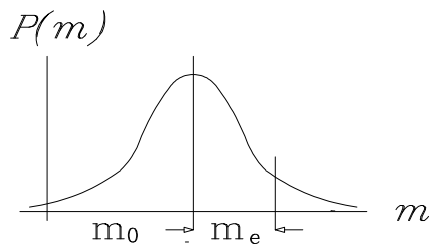


Abb. 198: Die Gaußsche Glockenkurve

$$I_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} a^3$$

Die Normierungskonstante der Verteilung erhält man nun aus

$$C \int e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx = C \sqrt{\pi} \sqrt{2} \sigma = C \sqrt{2\pi} \sigma = 1$$

$$C = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma}$$

γ) Mittleres Schwankungsquadrat

Analog zu Mittelwerten bei diskreten Verteilungen ist der Mittelwert der Funktion von x , $F(x)$ bezüglich

$$\langle F(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) F(x) dx$$

Der Mittelwert des Schwankungsquadrates

$$\begin{aligned} \langle (x-\mu)^2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \sigma^3 2^{3/2} = \sigma^2 = 4Npq l^2 \end{aligned}$$

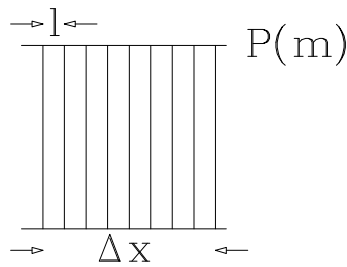


Abb. 199: Der Übergang zur kontinuierlichen Verteilung

für $l = 1$, $p = q = 1/2$ erhält man

$$\langle (x - \mu)^2 \rangle = \sigma = \sqrt{N}$$

Die absoluten Größen der Schwankungen wachsen also mit Wurzel N. Die relativen Größen

$$\frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

nehmen mit Wurzel N ab, z.B. Bei 10 Photonen im Detektor muß man mit einer Schwankung von 3 und einem relativen Fehler von 30 % rechnen. Bei 1000 Photonen wächst der Absolutwert der Schwankung auf 30, der relative Fehler sinkt auf $1/30 \approx 3\%$. Das Signal erscheint glatter.

f) Geschwindigkeitsverteilung in Gasen

α) Eindimensionales Gas

Wir betrachten zunächst ein eindimensionales Gas wie es etwa bei geladenen Teilchen im Magnetfeld vorkommt, wo sich die Gyrationzentren nur parallel zum Magnetfeld bewegen können. Wir nehmen an, daß durch die Vielzahl von Stößen, die ein Teilchen statistisch nach rechts oder links streuen, eine Verteilung wie beim eindimensionalen "random walk" entsteht.

$$f(v_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-v_x^2/2\sigma^2}$$

Da der Mittelwert der Geschwindigkeit gleich Null sein wird, ist das mittlere Schwankungsquadrat gegeben durch

$$\sigma^2 = \langle v_x^2 \rangle$$

Wir definieren jetzt als Temperatur wie früher

$$\frac{1}{2}m\langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{2}kT$$

Der Faktor 1/2 statt 3/2 rührt daher, daß wir ein eindimensionales Gas betrachtet haben. Man sagt, die Teilchen erhalten pro Freiheitsgrad 1/2 kT (Gleichverteilungssatz). Damit wird die Verteilungsfunktion

$$f(v_x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\frac{kT}{m}}} e^{-\frac{(1/2)mv_x^2}{kT}}$$

β) Dreidimensionales Gas

Bei einem dreidimensionalen Gas erhält man analog

$$f(v_x, v_y, v_z) = C e^{-\frac{1}{2}m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/kT}$$

Zur Bestimmung der Normierungskonstanten ordnen wir die Variablen im Integral so um, daß ein Produkt von gleichartigen Integralen erscheint, die wir schon kennen.

$$C \int e^{-\frac{(1/2)mv_x^2}{kT}} dv_x \int e^{-\frac{(1/2)mv_y^2}{kT}} dv_y \int e^{-\frac{(1/2)mv_z^2}{kT}} dv_z = 1$$

$$C \left(\sqrt{\frac{2\pi kT}{m}} \right)^3 = 1$$

$$C = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2}$$

Die Verteilungsfunktion lautet damit

$$f(v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-(1/2)m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)/kT}$$

γ) Verteilung für $|\mathbf{v}|=v$

Die Wahrscheinlichkeit für ein Teilchen, daß sein Geschwindigkeitsbetrag zwischen v und $v + dv$ liegt, ergibt sich aus der obigen Formel, indem man im Exponenten $v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ durch v^2 ersetzt und als Volumenelement im Geschwindigkeitsraum eine Kugelschale nimmt, die zwischen v und $v + dv$ liegt. Ihr Volumen ist $4\pi v^2 dv$. Die Verteilungsfunktion wird damit

$$f(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-(1/2)mv^2/kT}$$

Man nennt sie die Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung.

Bei der Angabe von charakteristischen Geschwindigkeiten muß man unterscheiden zwischen v_m , der häufigsten Geschwindigkeit, die sich aus der Bedingung $\left(\frac{df(v)}{dv} \right)_{v_m} = 0$ ergibt,

$$v_m = \sqrt{2kT/m}$$

$\langle v \rangle$, der mittleren Geschwindigkeit

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \sqrt{8kT/\pi m} = 1,13 v_m$$

$\langle v^2 \rangle$, der mittleren quadratischen Geschwindigkeit

$$\langle v^2 \rangle = \int v^2 f(v) dv = 3kT/m = (1,22v_m)^2$$

δ) Boltzmann Verteilung

Die Boltzmann Verteilung ist anwendbar für ein Gas, das aus Atomen besteht, die diskrete Energiezustände E_i einnehmen können. Wir betrachten gleich den allgemeineren Fall, in dem Niveaus entartet sein können, d.h. es gibt g_i Niveaus, die die gleiche Energie E_i haben. g_i ist das statistische Gewicht. Statistische Betrachtungen, die ähnlich sind wie die, die zur Maxwell'schen Geschwindigkeitsverteilung geführt haben, ergeben für die Anzahl der Teilchen in den Niveaus E_1 und E_2

$$\frac{f(E_1)}{f(E_2)} = \frac{g_1 e^{-E_1/kT}}{g_2 e^{-E_2/kT}} = \frac{g_1}{g_2} e^{-(E_1-E_2)/kT}$$

Deutet man die Erdatmosphäre als ein Ensemble von Teilchen in den Energieniveaus der Gravitation, erhält man aus der Boltzmann Verteilung die barometrische Höhenformel

$$\frac{f(h)}{f(0)} = e^{-mgh/kT}$$

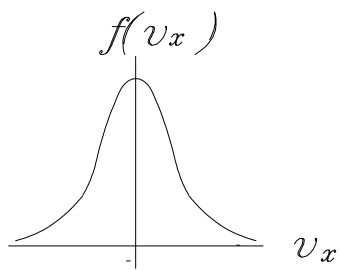


Abb. 200: Verteilung für v_x

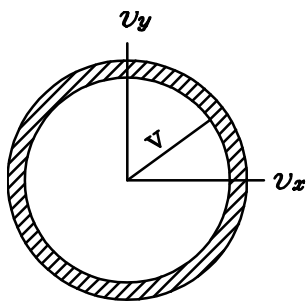


Abb. 201: Verteilung von $|\mathbf{v}|$

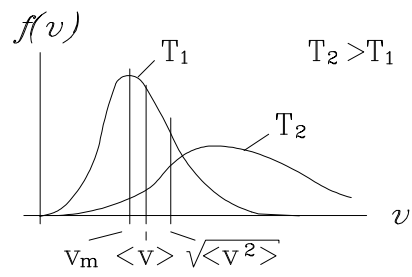


Abb. 202: Maxwellverteilung für zwei Temperaturen