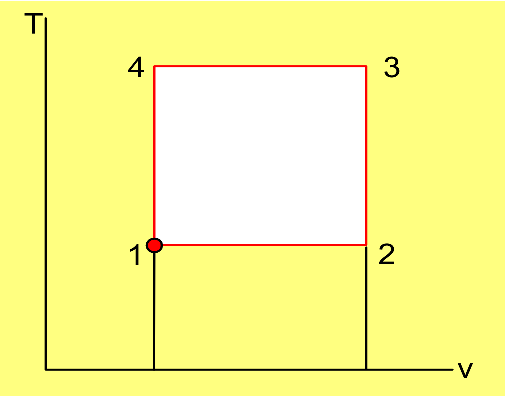
Aufgabe A 1.2 Zustandsgrößen - Prozessgrößen

Vorgegeben wird die Temperatur T und das spezifische Volumen v im Zustandpunkt 1 mit T_1 und v_1. Verändert man den Zustand auf beliebige Weise und kehrt auf einem anderen Wege zum Ausgangszustand 1 zurück, hier auf dem Weg über die Punkte 2 bis 4, so haben alle Zustandsgrößen bei Erreichen des Punktes 1 wieder den gleichen Wert wie vorher, anders gesagt, das Kreisintegral oder die Summe aller Änderungen muss null sein. Dieses Merkmal ist notwendig und hinreichend für den Beweis, dass es sich bei der zu untersuchenden Größe um eine Zustandsgröße handelt.



Untersucht werden sollen 2 verschiedene Größen, deren Differenzial in den beiden folgenden Gleichungen durch die Größen T und v beschrieben ist.

Größe q (Wärme): $dq = c \cdot dT + R \cdot \frac{T}{v} \cdot dv$

Größe s (Entropie): $ds = c \cdot \frac{dT}{T} + R \cdot \frac{dv}{v}$

c und R sind Konstanten: $c := 1004 \frac{J}{kg \cdot K}$ $\quad R := 300 \frac{J}{kg \cdot K}$

Lösung:

Es werden 4 Zustandspunkte gewählt, die im T-v-Diagramm ein Rechteck bilden. Diese Zustandspunkte sollen nacheinander durchlaufen werden, so dass sich ein geschlossener Kreislauf ergibt "Zu Fuß" kann man nun leicht die 4 Integrale bilden und unter Vorgabe von Zahlenwerten prüfen, ob die Summe der Änderungen 0 ergibt oder nicht. Da man in Mathcad alle Größen mit konkreten Zahlen definieren muss, werden diese beliebig vorgegeben, jedoch so, dass die Punkte 2 und 3 und die Punkte 1 und 4 jeweils übereinander liegen (gleiches v). Da die Abhängigkeit der Größe T von der Größe v hier unbekannt ist, ist der zweite Term für dq nur dann integrierbar, wenn T konstant ist oder wenn $dv = 0$ ist.

$$v := \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{m^3}{kg} \qquad T := \begin{pmatrix} 200 \\ 200 \\ 400 \\ 400 \end{pmatrix} \cdot K$$

(Darstellung der 4 Zustandsgrößen in einer Matrix. Hierzu im Menü "Einfügen" auf "Matrix" klicken, entsprechende Zeilen- und Spaltenzahl eingeben und Platzhalter ausfüllen).

z.B. ist das Volumen im Zustandspunkt 3 $\quad v_3 = 3 \frac{m^3}{kg}$ $\quad$ (Index mit Taste Alt Gr und [erstellen!)

Lösung:

1. Größe q

$$\Delta q_1 := \int_{T_1}^{T_2} c\, dT + \int_{v_1}^{v_2} R \cdot \frac{T_1}{v}\, dv \qquad \Delta q_2 := \int_{T_2}^{T_3} c\, dT + \int_{v_2}^{v_3} R \cdot \frac{T}{v}\, dv$$

$$\Delta q_3 := \int_{T_3}^{T_4} c\, dT + \int_{v_3}^{v_4} R \cdot \frac{T_3}{v}\, dv \qquad \Delta q_4 := \int_{T_4}^{T_1} c\, dT + \int_{v_4}^{v_1} R \cdot \frac{T}{v}\, dv \qquad \Delta q = \begin{pmatrix} 65.917 \\ 200.8 \\ -131.833 \\ -200.8 \end{pmatrix} \frac{kJ}{kg}$$

Sie können sich Schreibarbeit sparen. Wenn Sie die erste dieser 4 Formeln geschrieben haben, kopieren Sie diese (Neben die Formel klicken, Taste gedrückt halten und mit dem Cursor in den Rechenbereich fahren, Taste loslassen. Jetzt können Sie den blau eingerahmten Bereich mit den üblichen Windowsroutinen kopieren und an den gewünschten Stellen einfügen. Dann sorgfältig die Indizes ersetzen.

$$\sum_{n=2}^{4} \Delta q_n = -131833 \frac{J}{kg}$$

Die Summe der Wärmen ist ungleich 0: Die Wärme ist <u>keine</u> Zustandsgröße

Allgemein "zu Fuß"

Berechnung allgemein "zu Fuß":

$$\Delta q_1 = c\cdot(T_2 - T_1) + R\cdot T_1\cdot \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) = 0 + R\cdot T_1\cdot \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)$$

$$\Delta q_2 = c\cdot(T_3 - T_2) + 0$$

$$\Delta q_3 = c\cdot(T_4 - T_3) + R\cdot T_4\cdot \ln\left(\frac{v_4}{v_3}\right) = 0 + R\cdot T_4\cdot nn\left(\frac{v_4}{v_3}\right)$$

$$\Delta q_2 = c\cdot(T_1 - T_4) + 0$$

Summe: $$\Delta q_1 = R\cdot T_1\cdot \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + R\cdot T_4\cdot \ln\left(\frac{v_4}{v_3}\right) = R\cdot \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right)\cdot(T_1 - T_4) \neq 0$$

Allgemein "zu Fuß"

2. Größe s

$$\Delta s_1 := \int_{T_1}^{T_2} \frac{c}{T}\,dT + R\cdot\int_{v_1}^{v_2} \frac{1}{v}\,dv \qquad \Delta s_2 := \int_{T_2}^{T_3} \frac{c}{T}\,dT + R\cdot\int_{v_2}^{v_3} \frac{1}{v}\,dv$$

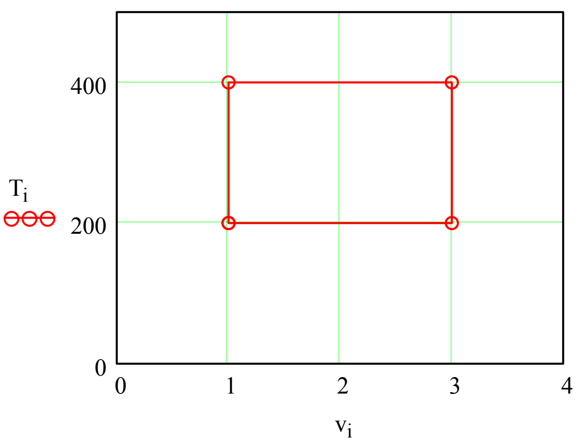
$$\Delta s_3 := \int_{T_3}^{T_4} \frac{c}{T}\,dT + R\cdot\int_{v_3}^{v_4} \frac{1}{v}\,dv \qquad \Delta s_4 := \int_{T_4}^{T_1} \frac{c}{T}\,dT + R\cdot\int_{v_4}^{v_1} \frac{1}{v}\,dv \qquad \Delta s = \begin{pmatrix} 329.584 \\ 695.92 \\ -329.584 \\ -695.92 \end{pmatrix} \frac{m^2}{s^2 K}$$

$$\sum_{n=1}^{4} \Delta s_n = 0\,\frac{J}{kg\cdot K}$$

Die Summe der Entropieänderungen ist 0 : Die Entropie ist eine Zustandsgröße

Man kann die 4 Zustandpunkte auch in einem aktiven Diagramm darstellen. Um die 4 Wege zu kennzeichnen, wird ein fünfter Punkt definiert, der mit dem ersten identisch ist.

$v_5 := v_1 \qquad T_5 := T_1 \qquad i := 1\,..\,5$



$$v_i = \begin{array}{|r|}\hline 1 \\ \hline 3 \\ \hline 3 \\ \hline 1 \\ \hline 1 \\ \hline \end{array}\ \frac{m^3}{kg} \qquad T_i = \begin{array}{|r|}\hline 200 \\ \hline 200 \\ \hline 400 \\ \hline 400 \\ \hline 200 \\ \hline \end{array}\ K$$

Damit der Kreislauf sichtbar wird, müssen die Grenzen für die Achsenabschnitte außerhalb des Bereiches der Eingabewerte liegen (Diagramm anklicken, dann den jeweiligen Platzhalter anklicken und den gewünschten Wert eingeben!).