

Heinz Steinbring

**Zur Arbeit von Nicolas Balacheff:
Construction et analyse d'une situation didactique –
Le cas de „la somme des angles d'un triangle“**

**(Konstruktion und Analyse einer didaktischen Situation –
Der Fall der „Winkelsumme im Dreieck“)**

**In: Journal für Mathematik-Didaktik
Jg. 12, 1991, H. 2/3
S. 265-274**

Heinz Steinbring

**Zur Arbeit von Nicolas Balacheff:
Construction et analyse d'une situation didactique –
Le cas de „la somme des angles d'un triangle“**

(Konstruktion und Analyse einer didaktischen Situation - Der Fall der 'Winkelsumme im Dreieck'.)

Die vorliegende Arbeit ordnet sich in den Rahmen spezifischer französischer Forschungen in der Mathematikdidaktik ein, wie sie an den IREM in Bordeaux, Paris, Grenoble sowie Marseille durchgeführt werden. "Eines der Probleme, das weithin in der französischen Forschergemeinschaft geteilt wird, gilt dem Aufbau eines originären theoretischen Rahmens mit eigenen Begriffen und Methoden, die drei Kriterien genügen: Bedeutsamkeit der beobachtbaren Phänomene, Vollständigkeit bezüglich der bedeutsamen Phänomene und Konsistenz der innerhalb des theoretischen Rahmens entwickelten Begriffe (BROUSSEAU 1986a). Ein breiter Konsens besteht auch hinsichtlich der methodologischen Forderung, sich des Experiments in dialektischer Interaktion mit Theorie zu bedienen: Das experimentelle Paradigma wird auf dem Hintergrund eines theoretischen Rahmens entworfen, die Beobachtungen der Experimente werden dann mit diesem Rahmen konfrontiert und mit Blick auf die drei oben genannten Kriterien überprüft." (LABORDE 1991, 36). Wichtige Kennzeichen dieser Forschungsrichtung, die gemäß einem besonderen theoretischen Konzept empirische Untersuchungen durchführt, sind Verbindungen von historisch-epistemologischen Analysen, a-priorischen Konstruktionen didaktischer Situationen sowie Erprobungen und Untersuchungen in laborähnlichen Unterrichtssituationen. "Die möglichen Entscheidungen bei der Gestaltung von Unterrichtsprozessen müssen in Übereinstimmung mit jenen Bedingungen getroffen werden, denen diese Prozesse unterworfen sind. ... Drei Arten von Entscheidungen sind grundlegend; sie betreffen

- die Wahl der Unterrichtsinhalte,
- die Planung der Interaktionen zwischen den Schülern und dem neu zu erlernenden Wissen;
- die Interventionen und die Rolle des Lehrers in der Klassensituation." (LABORDE 1991, 39).

In den Analysen geht es u. a. darum, die Auswirkungen bestimmter "didaktischer Phänomene" in den Unterrichtsinteraktionen zwischen Lehrer und Schülern und in der Auseinandersetzung mit dem Inhalt zu identifizieren, zu beschreiben und ihre Einflüsse besser zu verstehen. Zu diesen didaktischen Phänomenen gehören insbesondere der "didaktische Kontrakt", die didaktischen und epistemologischen "Hindernisse" (obstacles) und die sogenannten "didaktischen Effekte". (vgl. hierzu BALACHEFF 1984, BROUSSEAU 1986). Dementsprechend ordnet auch der Autor seine Arbeit in diesen allgemeinen Rahmen der

französischen didaktischen Forschung ein, wie sie insbesondere durch die Theorie der didaktischen Situationen von BROUSSEAU (1986a) entwickelt wurde. Eine Grundidee besteht darin, die Didaktik nicht bloß als eine Theorie des mathematischen Wissens zu verstehen, sondern zu ihrem Untersuchungsgegenstand die komplexen Bedingungen von *didaktischen Situationen* zu machen. "Da sie (die Didaktik) die Bedingungen, unter denen die für das jeweilige Wissen spezifischen Verhaltensweisen auftreten, im Hinblick auf ihre Kontrollierbarkeit und Reproduzierbarkeit untersucht, faßt sie diese Bedingungen, diese Situationen unmittelbar als ihren Untersuchungsgegenstand und als Mittel auf, festzustellen, was vergleichbar ist und was nicht, was reproduzierbar ist und was nicht, was vermittelt wurde und was nicht. Eine didaktische Situation unterscheidet sich von den "natürlichen" oder "historischen" Situationen, in denen das Ausüben oder Auftreten von Wissen möglich ist, nur dadurch, daß sie absichtlich herbeigeführt wird. Selbst wenn diese Intervention eines Dritten vieles verändert, kann von Interesse sein, zu verstehen, warum das so ist." (BROUSSEAU 1986b, 102).

Vor dem skizzierten theoretischen Hintergrund analysiert die vorliegende Arbeit konkret den Beispielfall: "Die Winkelsumme im Dreieck". Mit diesem elementaren fachlichen Problem verbindet der Autor Fragen im Hinblick auf Begriffsbedeutung und Begriffsentwicklung (insbesondere des Begriffs *Winkel* sowie des Begriffs *Dreieck*) sowie zu Fragen folgender Problemaspekte: *Beweis*, *Beweisnotwendigkeit*, *Beweisbedürfnis* und *formales Beweisen* gegenüber *empirisch-konkretem Nachweisen* durch Messen und Vergleichsoperationen (Zerschneiden, Falten usw.).

Das Thema wird in einem weitgespannten Bogen von historisch-epistemologischer Analyse über die Konstruktion von didaktischen Situationen bis hin zur Unterrichtsbeobachtung und -evaluation behandelt. Dementsprechend gliedert sich der vorliegende Aufsatz in drei Hauptabschnitte:

- "Konzepte zum Winkelbegriff und Beweise des Satzes/Theorems",
- "A-priorische Konstruktion der didaktischen Sequenz",
- "Analyse und experimentelle Durchführung".

Diese drei Hauptteile werden durch eine kurze *Einleitung* sowie durch einen kurzen Schlußabschnitt mit dem Titel "*Schlußfolgerungen*" eingerahmt.

In dem Abschnitt "*Konzepte zum Winkelbegriff und Beweise des Satzes/Theorems*" werden historische und teils historisch-schulmathematische Definitionen und Ideen des Winkelbegriffs resümiert (orientiert an statischen und an dynamischen Vorstellungen), und es werden, entsprechend den verschiedenen Winkelkonzepten, Beweise für die Konstanz der Summe der Winkel im Dreieck (sowie der Tatsache, daß die Winkelsumme 180° beträgt) vorgestellt. Auch diese Beweise sind teils historischer Natur, teils aus der französischen

Schulbuchliteratur übernommen. Diese Beweise umfassen sowohl experimentelle und - wie der Autor sagt - pragmatische Beweise (Zerschneiden, Falten, Messen) als auch "exakte" Beweise entsprechend den verschiedenen Winkelkonzepten.

Dieser Abschnitt sollte nicht als eine eigenständige historische Analyse von Winkelkonzept und Beweis des Satzes über die Winkelsumme verstanden werden, sondern stellt informatives Material und verschiedene Perspektiven zu Konzepten von Winkel und zu Beweisen des Winkelsummensatzes für die weiteren Kapitel zusammen. Interessant ist es festzustellen, wie eng teilweise die auf die Schulmathematik bezogenen Entwicklungen des Winkelbegriffs und des Winkelsummensatzes mit formalen Präzisierungen in der Mathematik verbunden waren. Hier scheint es in der französischen Schulmathematik eine starke Wechselbeziehung zwischen der Mathematik und einer schulbezogenen Form der Begriffsbildung und der Beweisführung in der elementaren Geometrie gegeben zu haben.

Im Abschnitt "*A-priorische Konstruktion der didaktische Sequenz*" werden in Form von mehreren Aufträgen für die Schüler drei zentrale didaktische Situationen ausgearbeitet, in denen dann die Schüler durch den Lehrer in eine experimentelle Situation zur Entwicklung des in Frage stehenden Problems (d.h. insbesondere eines Verständnisses für die Entwicklung eines Beweises) geführt werden. (Zur Abfolge und zum Typ dieser drei Situationen vergleiche die Beschreibung und das Beispiel von LABORDE 1991, S.41/2). Eine Grundorientierung ist dabei für den Autor die "Philosophie des Beweisens von Lakatos"¹. Durch Beweise und Widerlegungen soll in der Interaktion der Schüler untereinander und mit dem Lehrer nach und nach ein Verständnis für den zu beweisenden Sachverhalt, für die Beweisnotwendigkeit und für die Durchführung eines Beweises geschaffen werden. Auf den sozialen Charakter von Beweisbedürfnis und Beweisverständnis wird besonderer Wert gelegt.

Die drei Situationen umfassen eine *Einführungssituation*, in der den Schülern die Aufgabe gestellt wird (mit Varianten und Weiterführung), ein Dreieck zu zeichnen, die Winkel auszumessen sowie die ausgemessenen Winkelmaße zu addieren, um die Winkelsumme zu erhalten. In der *zweiten didaktischen Situation* werden die Schüler aufgefordert, für ein Dreieck (das auf einem Blatt Papier vorgegeben wird) jeweils eine Schätzung der einzelnen Winkel vorher abzugeben und dann auch eine konkrete Messung und Berechnung der Winkelsumme durchzuführen. Schätzung und konkrete Messung werden einander gegenübergestellt und die Schüler aufgefordert, Kommentare zum Vergleich von Schätzung und Messung abzugeben. In der *dritten Situation* wird den Schülern ein Blatt mit

¹Zusammen mit J.-M. Laborde ist N. Balacheff Übersetzer der französischen Ausgabe von Imre Lakatos, *Proofs and Refutations*.

drei verschieden großen Dreiecken vorgelegt; auch hier sollen sie wieder Messungen und Schätzungen vornehmen. Dabei wird auf die Einsicht abgezielt, daß die Größe des Dreiecks unabhängig ist von der Größe der Winkel bzw. von der Winkelsumme. Die meisten Schülern vermuten naiverweise eine Abhängigkeit der Dreiecksgröße und der Winkelgröße. Dieser Gesichtspunkt wird in dieser Studie vom Autor zentral verfolgt und analysiert.

Auf der Grundlage dieser drei didaktischen Situationen formuliert der Autor Alternativen für mögliche explizite Formulierungen der mathematischen Vermutung, wie sie im Rahmen der jeweils beobachtbaren Interaktionen zwischen Schülern und Lehrern auftreten könnten (nämlich Invarianz der Winkelsumme, insbesondere 180° als Winkelsumme im Dreieck sowie alternative Ansätze zur Entwicklung des Problem- und Beweisverständnisses). Im wesentlichen teilt er die Möglichkeiten der weiteren Fortführung des Unterrichtsverlaufes danach ein, welcher der "empirisch gefundenen" Werte für die Winkelsumme jeweils vorrangig akzeptiert wird, sei es ein Wert, der nahe bei 180° liegt, sei es ein Wert, der eher von 180° deutlich abweicht. Insbesondere für den Fall, daß die Schüler der Meinung sind, die Winkelsumme sei von 180° verschieden, gibt er dem Lehrer als Aufgabenvorschlag für die Schüler, ein Dreieck zu konstruieren, dessen Winkelsumme sehr verschieden von 180° ist. Eine zusätzliche "Offenheit" des möglichen Unterrichtsverlaufes ergibt sich aus der Frage, welcher Art der Beweisbedürftigkeit oder -notwendigkeit (für die Winkelsumme im Dreieck) sich bei den Schülern herausgebildet hat. Entsprechend formuliert der Autor hierfür in seiner a-priorischen Konstruktion Alternativen der Vorgehensweisen. Unter Rückgriff auf die historischen Beispiele werden verschiedene Beweisideen und -zugänge vorgeschlagen.

Der Abschnitt *"Analyse und experimentelle Durchführung"* stellt die Untersuchungen in zwei Klassen dar. Eine Unterrichtsreihe fand in einer mehr oder weniger "normalen" Klasse statt, während die andere in einer experimentellen Klasse durchgeführt wurde, in der der Lehrer zugleich Forscher war (der Autor spricht in diesem Zusammenhang von Aktionsforschung). Die Klassen wurden beobachtet und das Unterrichtsgeschehen auf Videoband aufgezeichnet. Die Analysen wurden ausschließlich mit Hilfe der Videobänder durchgeführt. Für beide Unterrichtsreihen werden die jeweiligen Etappen entsprechend der Vorabkonstruktion der didaktischen Situationen vorgestellt. Der Bericht wird durch einzelne transkribierte Aussagen aus der Unterrichtsinteraktion ergänzt. Insbesondere wird detailliert über die jeweiligen, von den Schülern gemachten Schätzungen und Messungen sowie über ihre Aussagen zu diesen Unterschieden berichtet.

An dieser Stelle ist es nicht möglich, im Detail die chronologische Darstellung der zwei Unterrichtsreihen sowie ihre Analyse im einzelnen wiederzugeben. Es sei auf einige wichtige Aspekte aufmerksam gemacht: Ein großer Unterschied, so der Autor, zwischen

den zwei Unterrichtsreihen bestand vor allem in der Unterschiedlichkeit der Interaktionsweise bzw. darin, wie mit den intendierten, neuen Interaktionsweisen, die in diesen laborähnlichen Situationen wichtige Elemente darstellten, jeweils umgegangen werden konnte. In der "normalen" Klasse zeigten sich Schwierigkeiten, während in der experimentellen Klasse solche eher offene Interaktionsformen schneller eingesetzt werden konnten.

Insbesondere im Hinblick auf die jeweils vom Lehrer eingenommene Rolle in der Interaktion stellt der Autor Unterschiede in beiden Klassen heraus: In der "normalen" Klasse mußte der Lehrer dem Zweifel von Schülern gegenüber der Gültigkeit der Vermutung (die Winkelsumme im Dreieck ist 180°) mit der Aufforderung begegnen, ein Gegenbeispiel zu finden, also z.B. ein Dreieck mit Winkelsumme 150° zu konstruieren. Im Rahmen des didaktischen Kontrakts mußte der Lehrer "sein Wissen verbergen", um so die Suche nach dem unmöglichen Dreieck zu rechtfertigen. Demgegenüber waren die Schüler der experimentellen Klasse schon vorzeitig bereit, die Vermutung zu akzeptieren. Die intendierte Vorgehensweise – so der Autor – wurde als eine gemeinsam akzeptierte Tätigkeit entsprechend der in dieser Klasse gültigen Begründungspraxis angesehen. Die Konsequenz formuliert der Autor so: "Die Schätzungen während der dritten Phase, die Messungen der Winkel, massiv und offensichtlich zu 180° korrigiert, führten uns zu der Hypothese, daß die Aussage der Winkelsumme im Dreieck als eine mathematische Vermutung entschärft wurde: Das Beweisproblem wurzelte nicht in einer Problematik der Begründung einer echten Vermutung. Die Schüler engagierten sich also nicht in einer Debatte über die verschiedenen vorgeschlagenen Beweise. Sie sind überzeugt und zeigen wenig Interesse im Blick auf ihre Vergleiche oder ihre Kritik. Es ist der Lehrer, der diese notwendige Arbeit durchführen wird." (vgl. Abschnitt 4.4)

Ein wichtiger Unterschied in beiden Klassen ergibt sich nach Darstellung des Autors hauptsächlich "aus der Natur des didaktischen Kontrakts und seiner Entwicklung" im Unterrichtsverlauf. "In allen Unterrichtssituationen versucht der Lehrer den Schüler wissen zu lassen, was er von ihm will, doch kann er dies nicht so sagen, daß der Schüler nur aufeinanderfolgende Befehle auszuführen hat; der Schüler muß eine verborgene Botschaft entziffern, begreifen, identifizieren – und er weiß das. 'Theoretisch' soll der Übergang von der Anweisung des Lehrers zur erwarteten Antwort dadurch erfolgen, daß der Schüler das Wissen anwendet, aber 'gemeinhin' ist der Lehrer auch dazu da, daß das Kind seine Antwort hersagt: Und er muß genügend Informationen gegeben haben, damit der Schüler das leisten kann. Also wendet sich der Schüler, der die Antwort nicht weiß, an den Lehrer, der ihm nach einem genauen Kode 'beispringen' muß. Indem er sich implizit damit rechtfertigt, daß er dem Schüler eine zu schwierige Frage gestellt hat, stellt der Lehrer dann eine Diagnose, die der Arbeit des Schülers eine Richtung geben soll. Auf diese Weise wird 'ein

didaktischer Vertrag' ausgehandelt, der dann zu einem kleinen Teil explizit, aber vor allem implizit festlegt, was jeder der Vertragspartner zu leisten hat und wofür er dem anderen auf die eine oder andere Weise rechenschaftspflichtig ist. Über diese wiederholten Aushandlungsprozesse gewinnen Lehrer und Schüler eine Vorstellung davon, was der andere jeweils von ihnen erwartet, und die 'Verträge' schränken dann die Wahlmöglichkeiten durch zahlreiche, häufig unerwartete Voraussetzungen ein." (BROUSSEAU 1986b, 110/1).

In der "normalen" Klasse muß der Lehrer entgegen seinen vertraglichen Bedingungen sein mathematisches Wissen verbergen – so der Autor; und in der experimentellen Klasse stellen sich die Schüler entsprechend einer allgemeinen Akzeptanz der hier gültigen Begründungspraxis schon vorzeitig auf die Vorgehensweise ein. Aufgrund dieser "sozial legitimierten" Akzeptanz erscheint keine Notwendigkeit für die Frage nach alternativen Hypothesen und ihre Kritik. Diese inhaltlich wertvolle Arbeit muß allein vom Lehrer durchgeführt werden, den Schülern scheint es nicht möglich darin eine Bedeutung zu erkennen, da sie die Hypothese ja schon völlig akzeptiert haben.

Des weiteren ist ein wichtiges Resultat dieser Analyse, und auch vom Autor selbst betont, daß es trotz (oder gerade wegen?) einer detaillierten und sorgfältig vorbereiteten Einführung in das Thema "Winkelsumme im Dreieck" kaum möglich war, den Schülern die Notwendigkeit einer Formulierung einer mathematischen Hypothese, eines Satzes oder eine Bedürftigkeit für eine Beweisführung nahezubringen bzw. mit ihnen zu entwickeln.

Im Abschnitt "Schlußfolgerungen" bringt der Autor diese sich mangelhaft zeigende und kaum herausbildbare Beweisbedürftigkeit sowie die mangelnde Einsicht in eine mathematische Vermutung bei den Schülern wiederum mit dem didaktischen Kontrakt in Zusammenhang. Der didaktische Kontrakt bringt eine Zirkularität in der Lehrer-Schüler-Interaktion zum Ausdruck: Die Schüler orientieren sich vor allem an den Erwartungshaltungen des Lehrers und weniger an Sachverhalten und Bedingungen, wie sie durch die Mathematik vorgegeben sind. Der Autor notiert: "In unserem Fall kann die Existenz expliziter Regeln, obwohl sie ein 'wissenschaftliches' Vorgehen deutlich macht, für die Ausarbeitung von Beweisen oder Argumenten eine Verschiebung hervorrufen, nach der die Lehreranforderungen zufrieden zu stellen sind – vor allen intrinsischen Anforderungen im Beweisproblem selbst." (Abschnitt 5.2)

Diese umfangreiche didaktische Arbeit ist nicht aus ihren einzelnen Teilen verstehbar, sondern stellt in ihrer Zusammenstellung unterschiedlicher Komponenten und deren Zusammenwirken einen bestimmten Typ didaktischer Forschung dar (der wie beschrieben an einigen Forschungsinstituten in Frankreich verfolgt wird). Dieser Typ ist nicht einfach auf einen einheitlichen Begriff zu bringen. Daher soll eine "Abgrenzung" vorgenommen wer-

den, d.h. eine Aussage dazu formuliert werden, was die einzelnen Abschnitte und Forschungsorientierungen nicht sind. Wie schon angemerkt, handelt es sich bei dem epistemologisch-historischen Teil nicht um eine eigenständig durchgeführte historische Analyse, sondern um eine Auflistung, eine Gegenüberstellung und einen Vergleich historischer Begriffsbildungen und Beweise zum Winkelsummensatz. Auch die a-priori Konstruktion der Sequenz stellt keine curriculare Konstruktion für den Winkelsummensatz dar; sie ist auch nicht vergleichbar mit dem, was in der deutschen Tradition "fachdidaktische Sachanalyse" heißt.

Im dritten experimentellen Teil werden keine Microanalysen anhand der Transkripte von Unterrichtssituationen (sei es im Hinblick auf Interaktionsformen, sei es im Hinblick auf gemeinsam ausgehandelte Bedeutungen oder unterliegende epistemologische Bedingungen) durchgeführt. Auch handelt es sich hierbei nicht einfach um eine übliche Analyse mit Vor- und Nachtests usw. Vielmehr wird hier versucht, möglichst – soweit dies überhaupt für realen Unterricht geschehen kann – unter reproduzierbaren Laborbedingungen Unterrichtsexperimente durchzuführen, zu beobachten, aufzuzeichnen und dann auszuwerten. Diese Art der reproduzierbaren Unterrichtsexperimente beinhaltet spezifische Probleme in der Theorie-Praxis-Beziehung, d.h. in der Einflußnahme, die präskriptive und deskriptive Forschungsabsichten auf die aktuelle Unterrichtspraxis haben können. Die "Reproduzierbarkeit" ist eine fundamentale Forderung, die an eine didaktische Situation gestellt wird. "Die Kenntnis ... von Situationen, die ... mit einem Wissensbestand, einer Repräsentation, einer Strategie ausgestattet sind, ermöglicht es, die Reproduktion von Situationen vorherzusagen, und sie stützt sich umgekehrt auf diese Reproduzierbarkeit als experimentellem Beweis, ..." (BROUSSEAU 1986b, 105).

Hintergrundphilosophie und epistemologische Ausgangsbasis, a-priorische Konstruktion der didaktischen Situationen und die sich dann anschließende experimentelle Durchführung und Beobachtung des Unterrichts orientieren sich an einer bestimmten Auffassung zum Verhältnis zwischen Typen von Lernumgebungen und mathematischen Begriffen, mathematischen Vermutungen und Beweisen. Eingebettet ist diese Inhaltsauffassung in die historisch-epistemologischen Resümierung von Winkelbegriff und Beweiskonzepten sowie an die Epistemologie, wie sie von Lakatos durch das Konzept von "Beweisen und Widerlegungen" herausgearbeitet wurde. "... verschieden organisierte Lernumgebungen (korrespondieren) mit verschiedenen Funktionsweisen des Wissens: Bestimmte Situationen verlangen einen impliziten Umgang mit dem Wissen ('Handlungssituationen'), andere verlangen von den Schülern die sprachliche Darstellung der Kenntnisse ('Darstellungssituationen') und eine dritte Kategorie von Situationen verlangt schließlich von den Schülern die Begründung ihrer Erklärungen ('Beweissituationen')." (LABORDE 1991, 46).

Diesen verschiedenen organisierten Lernumgebungen korrespondiert das Problem des Übergangs von empirischen zu theoretischen Aspekten des mathematischen Wissens. Für die hier in Frage stehende Thematik des Beweisens hat Balacheff an anderer Stelle in bezug auf das mathematische Wissen die folgende Unterscheidung getroffen: explication (Erläuterung), preuve (Zeugnis, Zeugenbeweis), démonstration (formaler, Regel-geleiteter Beweis) (vgl. BALACHEFF 1987). Die Schwierigkeit besteht darin – auch für die diskutierten, realen Unterrichtssituationen –, wie man von plausiblen Erläuterungen, die sich auf empirische Einzelfälle beziehen, zu mathematischen Beweisen gelangt (sowie zur Einsicht in die Notwendigkeit solcher Beweise), die eine allgemeine, theoretische Beziehung über den isolierten Einzelfall hinaus aufweist. Und in welcher Weise können die unterschiedenen Lernumgebungen mit den korrespondierenden Wissensformen dieses "Übergangsproblem" theoretisch modellieren?

Das Problem des Beweisens kann man in seinen vielfältigen Aspekten nicht nur als ein soziales Problem (mit einem mehr oder weniger fest vorgegebenen mathematischen Sachverhalt bzw. Begriffen und Beweismöglichkeiten) betrachten, man muß die Variabilität des Wissens im Hinblick auf den sozialen Kontext akzeptieren. Die Beweisbedürftigkeit und die Notwendigkeit, etwas als beweismöglich, beweisbedürftig zu akzeptieren, ist natürlich zum einen von einem sozialen Kontext abhängig; doch gleichzeitig muß sich auch auf der inhaltlichen Seite eine Entwicklung vollziehen: Beweise durchführen, die Notwendigkeit und Bedürftigkeit für einen Beweis erkennen zu können, die Herstellung von Vermutungen etc. erfordern auch auf der Ebene der Begriffe Veränderungen, Umformulierungen, Entwicklungen. So scheint, wie auch vom Autor angemerkt, bei den Schülern eine empirische Überzeugung für den in Frage kommenden Sachverhalt vorzuliegen. Es gibt in der Schülergruppe eine empirisch herausgearbeitete Einsicht in die Richtigkeit für die Winkelsumme von 180° . Die Winkelsumme im Dreieck zu beweisen, erfordert jedoch eine begriffliche Verallgemeinerung von Dreieck und Winkel gegenüber der empirischen Situation. Das heißt, die scheinbar so einfache Aussage, die Winkelsumme im Dreieck beträgt 180° , ist letztlich als eine begrifflich strukturelle Aussage neu zu interpretieren und nicht bloß als eine empirische Aussage zu interpretieren, die durch Messungen zu verifizieren ist. Damit verändert sich aber der gesamte Rahmen mathematischer Argumentations- und Arbeitsweisen in dem Sinne, daß nicht das empirische Objekt untersucht, sondern Annahmen über ein Objekt aufgestellt und mit Hilfe dieser Annahmen bestimmte Konsequenzen gezogen werden. Kurz: Die Entwicklung von Beweisen und Beweisbedürfnis erfordert ein Zusammenwirken von sozialen Bedingungen in der Interaktion und davon abhängig (und damit auch nur möglich) begrifflichen Verallgemeinerungen im Hinblick auf den epistemologischen Status des Wissens.

Gerade an dieser Stelle des schwierigen Übergangs vom empirischen Erfahrungswissen zum theoretischen Beziehungs-Wissen ist die Rolle des Lehrers von großer Wichtigkeit. Im Rahmen des didaktischen Kontrakts ist der Lehrer dazu verpflichtet, seinen Schülern das neue Wissen beizubringen; nimmt er diese Verpflichtung jedoch zu strikt, so unterliegt der Lernprozess häufig einer Bedeutungsreduktion. "Dies kann nicht bedeuten, daß der Lehrer sich nicht engagiert: Die Situation kann ohne ihn nicht funktionieren. Sie fordert von ihm, was er ist [im Sinne von: was er darstellt], nämlich seine Stellung zum Wissen. .. er ist und bleibt verantwortlich. Wie wir es beobachtet haben, können die Schüler sehr verschiedene Positionen zum Wissen einnehmen: Einige wissen schon, einige machen Zurückweisungen, einige zweifeln, einige nehmen gern eine Mehrheitsposition ein, einige zeigen kein Interesse. Gegenüber den Schülern, die die Position unterstützen, daß die Winkelsumme im Dreieck invariant ist, können andere Schüler die Existenz eines einzelnen Falles behaupten, selbst wenn sie nicht in der Lage sind, ihn zu konstruieren. Wir befinden uns in einer wirklichen intellektuellen Konflikt-Situation, keine konkrete Rückmeldung kann der einen oder anderen eingenommenen Position widersprechen. Im Gegenteil, diese Unmöglichkeit der Konstruktion eines Gegenbeispiels zur Eigenschaft kann der Suche nach einem intellektuellen Beweis Motivation geben, die die Debatte auflösen würde. Diese Problematik von Beweis und Widerlegung kann sich nur entwickeln, wenn die Eigenschaft (oder These) und ihr Widerspruch (Antithese) eine gleichwertig zugestandene Möglichkeit besitzen. In der Klasse müssen sie in einer ziemlich gleichgewichtigen Weise verteidigt werden, damit sich eine authentische Dialektik der Gültigkeitsbegründung einstellen kann. Und das erlaubt der Lehrer, indem er der Suche nach einem Dreieck mit einer Winkelsumme, die sehr von 180° abweicht, Legitimität verleiht. Die 'Wahrheit' wird problematisch, nicht weil der Lehrer keine Entscheidung trifft, sondern weil er bezeugt, daß er bereit ist, die These oder die Antithese zu unterstützen. In gewisser Weise gibt er der Unsicherheit einen Status, und gleichzeitig macht er sein Interesse deutlich, das er gegenüber dem 'Wissen' hat." (Abschnitt 5.2)

Die vorliegende Arbeit stellt eine detaillierte, umfassende und beispielhafte Arbeit aus dem Kontext der französischen mathematikdidaktischen Forschung dar. Im Hinblick auf die deutsche mathematikdidaktische Forschung ist insbesondere interessant, daß umfassend und detailliert an einem Beispielfall ein gewisser Typ dieser Arbeitsweise im Detail vorgestellt wird. Dies ermöglicht insbesondere, genauer Gemeinsamkeiten und Unterschiede im Hinblick auf jeweilige Forschungsorientierungen vorzunehmen. Einige Fragen wurden schon angerissen: In welcher Weise und wie werden die historische Forschung, sowie epistemologische Analysen für empirische Unterrichtsanalysen und Materialkonstruktionen genutzt? Welche Gemeinsamkeiten und Unterschiede gibt es zwischen der Konstruktion didaktischer Situationen sowie der didaktischen Sachanalyse? Wie unter-

scheiden, ergänzen und ähneln sich Unterrichtsanalysen im Rahmen der reproduzierbaren Bedingungen didaktischer Situationen (im französischen Forschungskontext) zu Unterrichtsanalysen, die sich den Interaktionsformen sowie den Formen von Rahmungsprozessen, Bedeutungsaushandlungen und der sozialen Konstitution epistemologischer Bedingungen im Unterricht widmen? Was sind Unterschiede und Gemeinsamkeiten im Hinblick auf das Konzept des mathematischen Wissens in verschiedenen sozialen Kontexten? Wird mathematisches Wissen eher als "äußerlich" und in der Grundstruktur unveränderlich vorgegeben gesehen oder als ein auch in seiner inhaltlichen Struktur variabler und im sozialen Kontext veränderlicher Typ von Wissen betrachtet?

Hiermit sind nur einige zentrale Aspekte möglicher Vergleichs- und Differenzierungsfragen im Hinblick auf die vorliegende Arbeit angesprochen. Interessant für den Leser wird die Analyse deshalb, weil sie umfassend und in allen Details durchgeführt wurde und so eine konkretisierende und beispielgebende Ergänzung zu den (relativ) abstrakten Beschreibungen von Forschungsmethoden und Ergebnissen darstellen kann (zum Beispiel BROUSSEAU 1986b).

Literatur:

- BALACHEFF, N. 1984. French research activities in didactics of mathematics. Some keywords and related references. In: STEINER, H. G. et al. Theory of Mathematics Education (TME). Bielefeld (occasional Paper 54 des IDM), S. 33 – 41.
- BALACHEFF, N. 1987. Processus de preuve et situations de validation. In: Educational Studies in Mathematics 18(2), S. 147 – 176.
- BROUSSEAU, G. 1986a. Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. In: Recherche en Didactique des Mathématiques, 7(2), S. 33 – 115.
- BROUSSEAU, G. 1986b. Forschungstendenzen der Mathematikdidaktik in Frankreich. In: Journal für Mathematikdidaktik, 7(2/3), S. 95 - 118.
- LABORDE, C. 1991. Kühnheit und Ratio der mathematikdidaktischen Forschung in Frankreich. In: Journal für Mathematikdidaktik, 12(1), S. 35 - 50.

Dr. Heinz Steinbring
 Institut für Didaktik der Mathematik
 Universität Bielefeld
 Postfach 8640
4800 Bielefeld 1